東海大学紀要情報通信学部
Vol.12,No.1,2019,pp.1-25

論文

初年次で学ぶ線形代数の卒業研究準備段階における学び直しの例 ～クラーメルの公式とその電気回路への応用～

貴田 研司[*1]，福原雅朗[*2]

An Example of Brushing up the Knowledge Learned in the First Grade Linear Algebra for a Preparation Stage of Graduation Research ~The Cramer's Rule and its Applications to Electric Circuit~

by

Kenshi KIDA[*1] and Masaaki FUKUHARA[*2]

(received on Mar.29, 2019 & accepted on Jul.26, 2019)

あらまし

卒業研究準備段階において，学生には初年次で学んだ数学知識の学び直しが必要となることがある．本論文では，数学教員と工学系学科教員の協力により体現された学び直しの例として，クラーメルの公式とその電気回路への応用について述べる．

Abstract

For a preparation stage of graduation research, students need to brush up the knowledge learned in the first grade linear algebra. The purpose of this paper is to give an explanation for the Cramer's rule and its applications to electric circuits as an example of brushing up by cooperation by the professors of Mathematics and Engineering.

キーワード： 学び直し，卒業研究準備段階，線形代数，クラーメルの公式，電気回路
Keywords: *Brushing up, Preparation Stage of Graduation Research, Linear Algebra, Cramer's Rule, Electric Circuit*

1. はじめに

東海大学情報通信学部は2019年3月末現在周知の通り，情報メディア学科，組込みソフトウェア工学科，経営システム工学科，通信ネットワーク工学科の4学科で構成されている．目覚ましい発展を遂げている情報通信分野を網羅するように構成された各学科において，その取り扱う学術領域は基礎から応用まで極めて広範で多岐に渡っている．この情報通信学部において，学部1年次（以下，初年次）の数学科目（微分積分及び線形代数）での教育内容の選定では，学部2年次以上で専門科目を学ぶための基礎学力の醸成という観点で，それぞれの専門分野の最大公約数に止めざるを得ない．そのため，学科の専門教員や先端技術を学ぼうとする学生からは，現状の初年次数学科目の教育内容では実例に乏しいとの意見が聞かれることがしばしばある．しかしながら，初年次の段階で具体的な応用例を扱うには，数学以外の知識が不足しているし，微分積分や線形代数の次の一歩をどちらに踏み出すかは，恣意的であり千差万別であると考えている．

本論文は，福原雅朗が貴田研司に，電気回路・同演習の授業（主に組込みソフトウェア工学科第2セメスタ学生対象）における解析で必須のクラーメルの公式を，線形代数の授業（主に組込みソフトウェア工学科第1セメスタ学生対象）でどのように教えているのかを尋ねたことに端を発するものである．この対話の結果として，線

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor
*2 情報通信学部組込みソフトウェア工学科 准教授
School of Information and Telecommunication Engineering,
Department of Embedded Technology, Associate Professor

形代数の教科書[1)]に掲載されている以下の演習問題：

演習問題．　つぎの連立方程式をクラーメルの公式を用いて解け．

$$\begin{cases} (s+1)x_1 & -x_2 & = & \dfrac{s}{s-1} \\ 3x_1 & +\ (s-2)x_2 & = & \dfrac{s+1}{s-1} \end{cases}$$

を，福原雅朗研究室に配属された学生（組込みソフトウェア工学科第6セメスタ，10名程度）に課すこととなった．第6セメスタの学生に上記演習問題を解かせた意図は，集積回路の設計に関する研究を軸としている同研究室で卒業研究を進める上で最低限必要となる回路解析能力が，線形代数や電気回路・同演習を始めとする学科カリキュラムの中で十分に定着しているかどうかを確かめ，もしも不足している場合にはそれを補うことである．これらのやりとりをきっかけとして，初年次の数学科目で学ぶ事柄がどこでどのように使われるかという実例について，学科教員と数学科目担当教員で話し合うことにより，卒業研究などで活かされるのではないかと考えるようになった．また，基礎学力の不足している学生への対応に関しても，一般講義の授業時間内では難しいが，少人数のゼミ（研究室）ならば可能であることもわかってきた．

本論文では，福原研究室に配属され卒業研究の準備段階にある10名程度の学生を対象に，電気回路の解法に必須のクラーメルの公式を理解させることを目的として，継続的に実施可能な教授法を著者らが考案した成果をまとめる．提示方法としては，高校の教員免許を取得する際の教育実習において，実習生が研究授業などを行う前に作成する“指導案”を，さらに詳しくしたものを示すことによって行う．

2. クラーメルの公式の証明

まず，クラーメルの公式について述べる．

定理2.1（クラーメルの公式）

n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む n 個の方程式からなる連立一次方程式

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \cdots\cdots (**)$ と表される．また，n 次行列 A の第 k 列のみを b に置き換えてできる n 次行列を

$$
A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)
$$

とおく.

$|A| \neq 0$ ならば$(*)$はただ一つの解

$$
x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)
$$

をもつ.

以下に 2 通りの方法で証明する.

2.1 行列の積を用いた証明 [2)]

敢えて，逆行列を使わない方法から先に述べる.

（クラーメルの公式の証明 I）

連立一次方程式$(*)$を行列の積で表した$(**)$ は

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

である. ここで

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & x_2 & & & \\ & & 0 & \vdots & & & \\ & & 1 & x_{k-1} & 0 & & \\ \vdots & & 0 & x_k & 0 & & \vdots \\ & & 0 & x_{k+1} & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
(k = 1,2,\cdots,n)
$$

の両辺の行列式をとると

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & x_2 & & & \\ & & 0 & \vdots & & & \\ & & 1 & x_{k-1} & 0 & & \\ \vdots & & 0 & x_k & 0 & & \vdots \\ & & 0 & x_{k+1} & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となる.

よって $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

である.

（証明終）

2.2 逆行列を用いた証明 [3)4)]

まず，証明をするために用いる重要な定理について述べておきたい.

n 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

について，(i,j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と表すとき

$$\tilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

のことを余因子行列という．これについて以下のことが成り立つ.

定理 2.2

n 次行列 A について，次の (1), (2) が成り立つ.

(1) A が正則行列である. $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

(2) $|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

である.

（クラーメルの公式の証明 II）

$|A| \neq 0$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1\tilde{a}_{11} + b_2\tilde{a}_{21} + \cdots + b_n\tilde{a}_{n1} \\ \vdots \\ b_1\tilde{a}_{1k} + b_2\tilde{a}_{2k} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nk} \\ \vdots \\ b_1\tilde{a}_{1n} + b_2\tilde{a}_{2n} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

だから

$$x_k = \frac{1}{|A|}(b_1\tilde{a}_{1k} + b_2\tilde{a}_{2k} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nk}) = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|A_k|}{|A|}$$

$$(k = 1,2,\cdots,n)$$

である．

（証明終）

3．連立一次方程式

初年次における基礎科目の線形代数でクラーメルの公式を教える際には，最初に証明を与えてから，実際の計算例を紹介するのが一般的かと思われる．この章で示す教材は，未知数が 2 個の場合の連立一次方程式を，【解法Ｉ（消去法）】，【解法 II （逆行列を用いる方法）】，【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】の順番で解くことにより，学生にクラーメルの公式がどのようなものであるか，そしてこれが確かに成り立つことを実感してもらうことにある．証明を理解することも重要であるが，「実感から理解へと繋げたい」という心積もりである．

教材 3.1

2 個の未知数 x_1, x_2 を含む 2 個の方程式からなる連立一次方程式

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \alpha \cdots\cdots ① \\ cx_1 + dx_2 = \beta \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を，以下の 3 通りの方法で解く．

【解法Ｉ（消去法）】

①×d −②×b より

$$(ad - bc)x_1 = d\alpha - b\beta.$$

また，②×a −①×c より

$$(ad - bc)x_2 = a\beta - c\alpha$$

が得られる．したがって，$ad-bc\neq 0$ ならば

$$x_1=\frac{d\alpha-b\beta}{ad-bc},\ \ x_2=\frac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}$$

である．

（解答終）

【解法 II （逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\cdots\cdots③$$

となる．もしも，$ad-bc\neq 0$ ならば，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であるが，これを③の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1=\frac{d\alpha-b\beta}{ad-bc},\ \ x_2=\frac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$ であるならば，クラーメルの公式より

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{d\alpha-b\beta}{ad-bc},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}$$

である．

（解答終）

教材 3.2

3 個の未知数 x_1,x_2,x_3 を含む 3 個の方程式からなる連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\cdots\cdots① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\cdots\cdots② \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\cdots\cdots③ \end{cases}$$

を，以下の 3 通りの方法で解く．

【解法 I （消去法）】

まず, ①$\times a_{23}-$② $\times a_{13}$ より

$$(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}-b_2a_{13}\cdots\cdots④.$$

また，①$\times a_{33}-$ ③ $\times a_{13}$ より

$$(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})x_1+(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})x_2=b_1a_{33}-b_3a_{13}\cdots\cdots⑤$$

である．

さらに，④$\times(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-$⑤ $\times(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$ より

$$(a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31})x_1$$

$$=\ b_1\,a_{22}a_{33}-\ b_1\,a_{23}a_{32}+b_2\,a_{13}a_{32}-b_2\,a_{12}a_{33}+b_3\,a_{12}a_{23}-b_3\,a_{13}a_{22}$$

が得られる．

よって，$a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}\neq 0$ ならば

$$x_1=\frac{b_1\,a_{22}a_{33}-\ b_1\,a_{23}a_{32}+b_2\,a_{13}a_{32}-b_2\,a_{12}a_{33}+b_3\,a_{12}a_{23}-b_3\,a_{13}a_{22}}{a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}}$$

である．

また同様にして

$$x_2=\frac{b_1\,a_{23}a_{31}-b_1\,a_{21}a_{33}+b_2\,a_{11}a_{33}-b_2\,a_{13}a_{31}+b_3\,a_{13}a_{21}-b_3\,a_{11}a_{23}}{a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}}\ ,$$

$$x_3=\frac{b_1\,a_{21}a_{32}-\ b_1\,a_{22}a_{31}+b_2\,a_{12}a_{31}-b_2\,a_{11}a_{32}+b_3\,a_{11}a_{22}-b_3\,a_{12}a_{21}}{a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}}$$

が得られる．

（解答終）

【解法 II （逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdots\cdots④$$

となる．

もしも，$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$ ならば，定理 2.2 より $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{31}\\\tilde{a}_{12}&\tilde{a}_{22}&\tilde{a}_{32}\\\tilde{a}_{13}&\tilde{a}_{23}&\tilde{a}_{33}\end{pmatrix}$ である

が，これを④の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}&a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}&a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\\a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}&a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}&a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\\a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}&a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}&a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + b_2(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ b_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + b_3(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \\ b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + b_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = \frac{b_1\,a_{22}a_{33} - b_1\,a_{23}a_{32} + b_2\,a_{13}a_{32} - b_2\,a_{12}a_{33} + b_3\,a_{12}a_{23} - b_3\,a_{13}a_{22}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{b_1\,a_{23}a_{31} - b_1\,a_{21}a_{33} + b_2\,a_{11}a_{33} - b_2\,a_{13}a_{31} + b_3\,a_{13}a_{21} - b_3\,a_{11}a_{23}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1\,a_{21}a_{32} - b_1\,a_{22}a_{31} + b_2\,a_{12}a_{31} - b_2\,a_{11}a_{32} + b_3\,a_{11}a_{22} - b_3\,a_{12}a_{21}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ であるならば，クラーメルの公式より

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|},\quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

すなわち

$$x_1 = \frac{b_1\,a_{22}a_{33} - b_1\,a_{23}a_{32} + b_2\,a_{13}a_{32} - b_2\,a_{12}a_{33} + b_3\,a_{12}a_{23} - b_3\,a_{13}a_{22}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{b_1\,a_{23}a_{31} - b_1\,a_{21}a_{33} + b_2\,a_{11}a_{33} - b_2\,a_{13}a_{31} + b_3\,a_{13}a_{21} - b_3\,a_{11}a_{23}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1\,a_{21}a_{32} - b_1\,a_{22}a_{31} + b_2\,a_{12}a_{31} - b_2\,a_{11}a_{32} + b_3\,a_{11}a_{22} - b_3\,a_{12}a_{21}}{a_{11}\,a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}a_{31} + a_{13}\,a_{21}a_{32} - a_{11}\,a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}a_{33} - a_{13}\,a_{22}a_{31}}$$

である．

（解答終）

【付記】

上述の3通りの解法の中に登場する

$$ad-bc,\quad a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}$$

は，もちろんAの行列式のことである．行列式の起源については別の場で述べることとするが，歴史的には（教育の順序とは逆で）行列の前に行列式が登場していることも，この3つの解法から垣間見て欲しい．行列はmatrixの訳語であり，matrixは元来（発生・成長の）母体，基盤という意味をもつ言葉である．連立一次方程式の解法において大きな意味をもつ行列式（determinant）を作り出すものなので，行列はmatrixと名付けられたのである．

4. 連立線形微分方程式の解法

初年次における基礎科目の線形代数では，連立一次方程式の解法としてクラーメルの公式のより先に，ガウス・ジョルダンの消去法を紹介している．したがって，クラーメルの公式を学ぶことの意味が見えないままというのが，学生にとっては正直なところであるかと思う．この章では，まず教材4.1にあるように，係数が文字式になっている連立一次方程式を，【解法I （消去法）】，【解法II （逆行列を用いる方法）】，【解法III （クラーメルの公式を用いる方法）】の順番で解くことにより，学生に，クラーメルの公式を用いる必要性を実感してもらうことにある．また，教材4.2は，教材4.1で扱った連立一次方程式がどのようにして作られたかを示すものである．問題作成のための問題などでは決してないことを，是非とも理解してもらいたい．しかし，ラプラス変換についての知識が十分ではない学生もいるものと思われるし，時間のことも考慮する必要がある．したがって，教材4.2については，割愛することも選択肢に入れておきたい．

教材 4.1

2 個の未知数x_1，x_2を含む 2 個の方程式からなる連立一次方程式

$$\begin{cases}(s+1)x_1+s\,x_2=\dfrac{1}{s+1}\cdots\cdots① \\ (s+2)x_1+2(s+1)\,x_2=1\cdots\cdots②\end{cases}$$

を，教材 2.1,2.2 で紹介した 3 通りの方法で解く．

【解法Ⅰ （消去法）】

①$\times 2(s+1)$ $-$②$\times s$ より

$$(s^2+2s+2)x_1=-s+2\cdots\cdots③$$

である．また，①$\times (s+2)$ $-$②$\times (s+2)$ より

$$(-\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}-2)\,x_2=\frac{-\mathrm{s}^2-\mathrm{s}+1}{\mathrm{s}+1}\cdots\cdots④$$

となっている．したがって，③,④より

$$x_1=\frac{-s+2}{s^2+2s+2}\,,\qquad x_2=\frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

【解法 II （逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

となる．さて，$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}$ を，①の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\begin{pmatrix} (s+1)(2-s) \\ s^2+s-1 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = \frac{-s+2}{s^2+2s+2}, \qquad x_2 = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．さて $|A| = \begin{vmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{vmatrix} = s^2+2s+2$ とおくと

であるから

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & s \\ 1 & 2(s+1) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-s+2}{s^2+2s+2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{1}{s+1} \\ s+2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

教材 4.2

次の連立常微分方程式の初期値問題を，ラプラス変換を用いて解く．

$$\begin{cases} x' + y' + x = e^{-t} \\ x' + 2y' + 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

初期条件：$x(0) = -1$，$y(0) = 1$

（解答）

まず，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおくことにする．

連立微分方程式の各式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases}\{sX(s)-x(0)\}+\{sY(s)-y(0)\}+X(s)=\dfrac{1}{s+1}\\ \{sX(s)-x(0)\}+2\{sY(s)-y(0)\}+2X(s)+2Y(s)=0\end{cases}$$

となるが，初期条件：$x(0)=-1$，$y(0)=1$ を代入すると

$$\begin{cases}(s+1)X(s)+sY(s)=\dfrac{1}{s+1}\\ (s+2)X(s)+2(s+1)Y(s)=1\end{cases}$$

となる．この連立方程式を，$X(s)$，$Y(s)$ について解くと

$$X(s)=\frac{-s+2}{s^2+2s+2}, \qquad Y(s)=\frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

が得られる．したがって，$X(s)$，$Y(s)$ の逆ラプラス変換を求めて

$$x(t)=-e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t,\quad y(t)=-e^{-t}+2e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$$

が得られる．

（解答終）

5. 電気回路の解法

上述のクラーメルの公式による連立一次方程式の解法の一例として，本章では電気回路の電流や電圧を解析する事例とその解答例を提示する．なお，ここでは以下に示すように網目電流法を用いて連立一次方程式を立てることとする．電気回路の網目電流法は，主に電気・電子・情報系の学部学科の 1 年次または 2 年次前半で学ぶ内容であり [5)6)]，集積回路設計やコンピュータアーキテクチャなど専門性の高い研究に取り組む際の基礎となる計算手法である．ここでは，卒業研究準備段階において回路解析の基礎知識を必要とする学生を対象として，まず本論文 2 章に示したクラーメルの公式の証明や 3 章・4 章に示した教材に取り組ませ，クラーメルの公式が，消去法並びに逆行列による解法よりも計算効率が高いことを理解させた後に，以下に示す電気回路の教材に取り組ませることで，計算過程の理解を一層深めることを狙っている．

教材 5.1

基本的な T 型回路を Fig.1 に示す．同図において，E_1，E_2は直流電源，R_1，R_2，R_3 は抵抗を表している．このとき，各抵抗に流れる電流I_1，I_2，I_3 を求めることを考える．

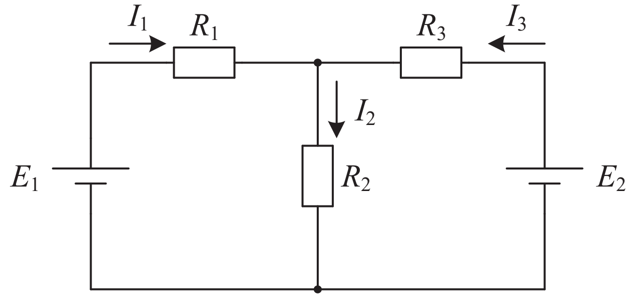

Fig.1 Basic T-type circuit for mesh analysis.

まず，Fig.1 の回路に対し，Fig.2 のようにループ電流I_a，I_bを定義する．

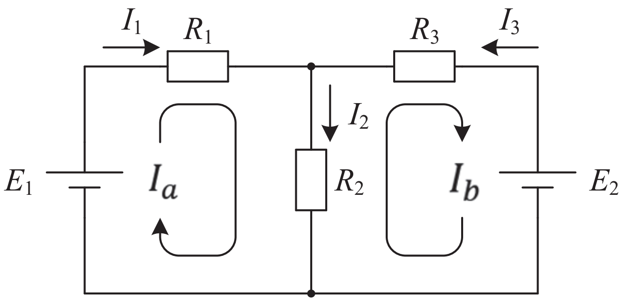

Fig.2 Basic T-type circuit with loop currents.

このとき，キルヒホッフの電流則により，

$$I_1 = I_a\,, \tag{5.1}$$

$$I_2 = I_a - I_b\,, \tag{5.2}$$

$$I_3 = -I_b \tag{5.3}$$

が成り立つ．

Fig.2 の回路に対し網目電流法を適用すると，機械的に次式が得られる．

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_a \\ I_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

ここで，式(5.4)においてI_a，I_b を求める際に，上述のクラーメルの公式を用いることができる．なお，クラーメルの公式中の行列式の表現方法に関して，本文 2 章～4 章では数学系教科書で頻繁に使用される$|A|$という記号を用いたが，以下では電気回路系教科書で頻繁に使用されるΔ という記号を用いることとする．したがって，式(5.4)に対して

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \tag{5.5}$$

とおくことにより，クラーメルの公式を適用して

$$I_a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E_1 & -R_2 \\ -E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_2E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\,, \tag{5.6}$$

$$I_b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E_1 \\ -R_2 & -E_2 \end{vmatrix} = \frac{R_3E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\,. \tag{5.7}$$

が得られる．

クラーメルの公式を活用して得られた式(5.6)，式(5.7)を式(5.1)～(5.3)に代入することで，電流I_1，I_2，I_3を求めることができる．

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_2E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \tag{5.8}$$

$$I_2 = \frac{R_3E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \tag{5.9}$$

$$I_3 = -\frac{R_2E_1 - (R_1 + R_2)E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}. \tag{5.10}$$

（解答終）

教材 5.2

Fig.3 はブリッジ回路を示している．同図において，Eは直流電源，R_1，R_2，R_3，R_4，R_G は抵抗を表している．このとき，Node x から Node y に向かって抵抗R_Gを流れる電流I_Gを求めることを考える．

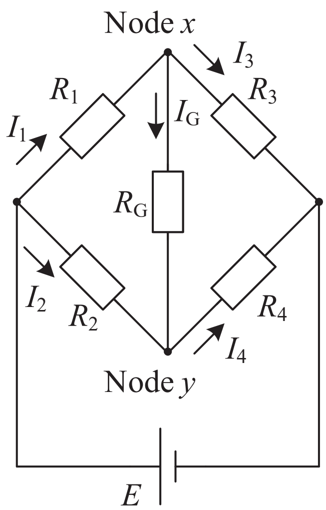

Fig.3 Wheatstone bridge circuit.

このブリッジ回路についても，T 型回路と同様に網目電流法により連立一次方程式を立てることにする．まず，Fig.3 の回路についてループ電流を Fig.4 のように定義する．

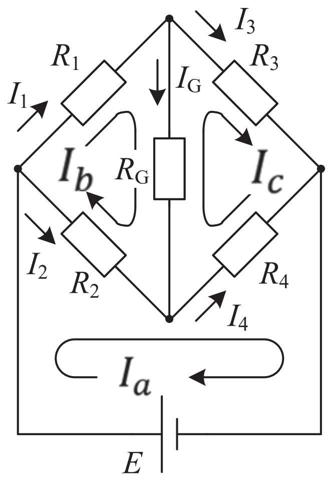

Fig.4 Wheatstone bridge circuit with loop currents.

続いて，Fig.4 に対し網目電流法を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{pmatrix} R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_1+R_2+R_G & -R_G \\ -R_4 & -R_G & R_3+R_4+R_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

式(5.11)において電流I_a，I_b，I_cを求める際にクラーメルの公式を用いることができる．ここで，

$$\begin{aligned} \varDelta' &= \begin{vmatrix} R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_1+R_2+R_G & -R_G \\ -R_4 & -R_G & R_3+R_4+R_G \end{vmatrix} \\ &= R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4+R_1R_2R_G+R_1R_4R_G+R_2R_3R_G+R_3R_4R_G \end{aligned} \tag{5.12}$$

とおくと

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{\varDelta'}\begin{vmatrix} E & -R_2 & -R_4 \\ 0 & R_1+R_2+R_G & -R_G \\ 0 & -R_G & R_3+R_4+R_G \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\varDelta'}(R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4+R_1R_G+R_2R_G+R_3R_G+R_4R_G)E, \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$I_b = \frac{1}{\varDelta'}\begin{vmatrix} R_2+R_4 & E & -R_4 \\ -R_2 & 0 & -R_G \\ -R_4 & 0 & R_3+R_4+R_G \end{vmatrix} = \frac{1}{\varDelta'}(R_2R_3+R_2R_4+R_2R_G+R_4R_G)E, \tag{5.14}$$

$$I_c = \frac{1}{\varDelta'}\begin{vmatrix} R_2+R_4 & -R_2 & E \\ -R_2 & R_1+R_2+R_G & 0 \\ -R_4 & -R_G & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varDelta'}(R_1R_4+R_2R_4+R_2R_G+R_4R_G)E. \tag{5.15}$$

また，Fig.4 についてキルヒホッフの電流則により，電流I_Gは，

$$I_G = I_b - I_c \tag{5.16}$$

で与えられる．したがって，式(5.16)に式(5.14)及び式(5.15)を代入して，

$$I_G = \frac{1}{\varDelta'}(R_2R_3 - R_1R_4)E \tag{5.17}$$

が得られる．式(5.17)より，$R_2R_3 - R_1R_4 = 0$とすれば，電流I_Gが 0[A]となることがわかる．このとき，Fig.3 中の Node x と Node y が等電位となり，ブリッジ回路が平衡状態となる．この回路はホイートストンブリッジとも

呼ばれ，上述の平衡状態という性質を利用した検流計として用いられる．

（解答終）

6. むすび

本論文では，情報通信学部において基礎教育と発展教育のはざまで数学科目の教育内容の選定に苦慮する現状を鑑み，学科教員と数学科目担当教員が協力して学部 3 年次の学び直しとしての数学教材を提案し議論を深めた．

通常の線形代数や電気回路の講義においてクラーメルの公式を教授する単元では，一般論としてn 次行列を扱うことが多く，また，例題として学生に問題を解かせる場合には時間の都合で 2 次行列を扱うに留めることが多い．これに対し本論文では，3 章連立一次方程式並びに 5 章電気回路の解法において，2 次行列の教材に加えて 3 次行列の教材を提示することで，クラーメルの公式の有用性が理解しやすいような工夫を施した．また，上記の流れで指導することにより，4 次行列以上を利用する場合には手計算では煩雑になるため一般的には数値解析コンピュータや回路シミュレータを利用する，という仕組みを理解させる一助になると考えている．

そもそも 3 年次後期のプレゼミナールの教材作成はこれまでにはあまり存在しなかったことかと考える．特定の数学の概念（クラーメルの公式）についての詳細な解説と具体的な応用例（電気回路の解法）が同時に書かれている文献もそう多くはないであろう．また，教材の展開としても，係数が文字式になっている連立一次方程式を，敢えて【解法 I （消去法）】，【解法 II （逆行列を用いる方法）】，【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】の順番で解くことにより，クラーメルの公式を用いる必要性を示すという方法もゼミナール形式ならではの手法ではないだろうか．そして，問題作成においても，多くの学生が微分方程式とラプラス変換を学んでいるという実情を踏まえて，連立線形微分方程式についてラプラス変換を用いて解く際に登場する連立一次方程式を選んだことに言及したことも，通常では見受けられないことかと考える．

本論文に記述されている内容を実際に卒業研究準備段階の学生たちに提示した結果，学生たちが初年次で学習した線形代数の内容を思い出しながら課題に取り組む様子を観察でき，卒業研究着手に向けての良好な学び直しの機会を提供できたといえる．

今後も，数学科目担当教員と学科教員による教材作成が行われていくことを願う．

参考文献

1）柴田正憲，貴田研司 共著「情報科学のための線形代数」コロナ社，2009
2）硲野敏博，加藤芳文 共著「理工系基礎線形代数学」学術図書出版，1994
3）川原雄作，木村哲三，藪康彦，亀田真澄 共著「線形代数の基礎」共立出版，1994
4）硲野敏博，原祐子，山辺元雄 共著「理工系の入門線形代数」学術図書出版，1997
5）西巻正郎，森武昭，荒井俊彦 共著「電気回路の基礎　第 3 版」森北出版，2014
6）藤井信生 著「よくわかる電気回路」オーム社，1994

付録1

第2章において，学生の理解を助けるための補足説明を記述する．

定理2.1の補足説明

クラーメルの公式の中に登場する次の行列

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

については，どうようなものであるかの理解をより確実にするために

例 1（$n=2$ の場合）

$$A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

例 2（$n=3$ の場合）

$$A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

を示しておきたいところである．

（クラーメルの公式の証明 I）の補足説明

まず，証明への導入として以下のことを示す．

$(**)$ は $n=3$ の場合に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となっている．ここで

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

の両辺の行列式をとると，それぞれ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

となる．したがって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば，連立一次方程式$(*)$の解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

である．上に証明への導入と述べたが，状況によってはこれで証明済みとしてもよいと考える．

（クラーメルの公式の証明 II）の補足説明

$|A| \neq 0$ ならば$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左からA^{-1} をかけると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1\tilde{a}_{11} + b_2\tilde{a}_{21} + \cdots + b_n\tilde{a}_{n1} \\ \vdots \\ b_1\tilde{a}_{1k} + b_2\tilde{a}_{2k} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nk} \\ \vdots \\ b_1\tilde{a}_{1n} + b_2\tilde{a}_{2n} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

だから

$$x_k = \frac{1}{|A|}(b_1\tilde{a}_{1k} + b_2\tilde{a}_{2k} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nk}) \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

であることがわかる．ところが，$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$を，第$\boldsymbol{k}$ 列について展開したものが

$$b_1\tilde{a}_{1k} + b_2\tilde{a}_{2k} + \cdots + b_n\tilde{a}_{nk} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

であるから

$$x_k = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|A_k|}{|A|} \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

である．

付録2

教材3.1と教材3.2について，学生向けの解答・解説は以下の通りである．

教材3.1

【解法Ⅰ（消去法）】

①× d は $adx_1 + bdx_2 = d\alpha$ であり，②× b は $bcx_1 + bdx_2 = b\beta$ であるから，①× d −②× b より

$$(ad - bc)x_1 = d\alpha - b\beta.$$

また，①× c は $acx_1 + bcx_2 = c\alpha$ であり，②× a は $acx_1 + adx_2 = a\beta$ であるから，②× a −①× c より

$$(ad - bc)x_2 = a\beta - c\alpha$$

が得られる．

したがって，$ad - bc \neq 0$ ならば

$$x_1 = \frac{d\alpha - b\beta}{ad - bc},\ x_2 = \frac{a\beta - c\alpha}{ad - bc}$$

である．

（解答終）

【解法II（逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdots\cdots ③$$

となる．

もしも，$ad - bc \neq 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるが，これを③の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d\alpha - b\beta \\ a\beta - c\alpha \end{pmatrix}$$

から

$$x_1 = \frac{d\alpha - b\beta}{ad - bc},\ x_2 = \frac{a\beta - c\alpha}{ad - bc}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となる．ここで

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, |A_1| = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix} = d\alpha - b\beta, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} = a\beta - c\alpha$$

とおくことにする．

もしも， $|A| = ad - bc \neq 0$ であるならば，クラーメルの公式より

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{d\alpha - b\beta}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{a\beta - c\alpha}{ad - bc}$$

である．

（解答終）

教材3.2

【解法Ｉ（消去法）】

a_{13}, a_{23}, a_{33} のうち少なく一つは 0 とことなるので，一般性を失うことなく $a_{13} \neq 0$ としておく．

まず，①× a_{23} は

$$a_{11}a_{23}x_1 + a_{12}a_{23}x_2 + a_{13}a_{23}x_3 = b_1a_{23} \cdots\cdots ④$$

であり，②× a_{13} は

$$a_{13}a_{21}x_1 + a_{13}a_{22}x_2 + a_{13}a_{23}x_3 = b_2a_{13} \cdots\cdots ⑤$$

なので，④－⑤より

$$(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13} \cdots\cdots ⑥.$$

また，①× a_{33} は

$$a_{11}a_{33}x_1 + a_{12}a_{33}x_2 + a_{13}a_{33}x_3 = b_1a_{33} \cdots\cdots ⑦$$

であり，③× a_{13} は

$$a_{13}a_{31}x_1 + a_{13}a_{32}x_2 + a_{13}a_{33}x_3 = b_3a_{13} \cdots\cdots ⑧$$

なので，⑦－⑧より

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13} \cdots\cdots ⑨$$

である．

さらに，⑥×$(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$ より

$$(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_2$$

$$= (b_1a_{23} - b_2a_{13})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \cdots\cdots ⑩$$

であり，⑨$\times(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$は

$$(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})x_2$$

$$=(b_1a_{33}-b_3a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\cdots\cdots⑪$$

である．したがって，⑩－⑪から

$$\{(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\}x_1$$

$$=(b_1a_{23}-b_2a_{13})(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-(b_1a_{33}-b_3a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

なので

$$(a_{11}a_{23}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{13}a_{32}-a_{13}a_{21}a_{12}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{13}a_{32}-a_{11}a_{33}a_{12}a_{23}+a_{11}a_{33}a_{13}a_{22}$$
$$+a_{13}a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{31}a_{13}a_{22})x_1$$
$$=b_1a_{23}a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{13}a_{32}-b_2a_{13}a_{12}a_{33}+b_2a_{13}a_{13}a_{32}-b_1a_{33}a_{12}a_{23}+b_1a_{33}a_{13}a_{22}+b_3a_{13}a_{12}a_{23}$$
$$-b_3a_{13}a_{13}a_{22}$$

$$(-a_{11}a_{23}a_{13}a_{32}-a_{13}a_{21}a_{12}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{13}a_{32}+a_{11}a_{33}a_{13}a_{22}+a_{13}a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{31}a_{13}a_{22})x_1$$
$$=-b_1a_{23}a_{13}a_{32}-b_2a_{13}a_{12}a_{33}+b_2a_{13}a_{13}a_{32}+b_1a_{33}a_{13}a_{22}+b_3a_{13}a_{12}a_{23}-b_3a_{13}a_{13}a_{22}$$

$$a_{13}(-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{11}a_{33}a_{22}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22})x_1$$
$$=a_{13}(-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_1a_{33}a_{22}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{13}a_{22})$$

$$a_{13}(a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31})x_1$$
$$=\ a_{13}(b_1\,a_{22}a_{33}-\ b_1\,a_{23}a_{32}+b_2\,a_{13}a_{32}-b_2\,a_{12}a_{33}+b_3\,a_{12}a_{23}-b_3\,a_{13}a_{22})$$

なので，$a_{13}\neq 0$より

$$(a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31})x_1$$
$$=\ b_1\,a_{22}a_{33}-\ b_1\,a_{23}a_{32}+b_2\,a_{13}a_{32}-b_2\,a_{12}a_{33}+b_3\,a_{12}a_{23}-b_3\,a_{13}a_{22}$$

が得られる．

よって，$a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}\neq 0$ならば

$$x_1=\frac{b_1\,a_{22}a_{33}-\ b_1\,a_{23}a_{32}+b_2\,a_{13}a_{32}-b_2\,a_{12}a_{33}+b_3\,a_{12}a_{23}-b_3\,a_{13}a_{22}}{a_{11}\,a_{22}a_{33}+a_{12}\,a_{23}a_{31}+a_{13}\,a_{21}a_{32}-a_{11}\,a_{23}a_{32}-a_{12}\,a_{21}a_{33}-a_{13}\,a_{22}a_{31}}$$

である．

また同様にして

$$x_2 = \frac{b_1\, a_{23}a_{31} - b_1\, a_{21}a_{33} + b_2\, a_{11}a_{33} - b_2\, a_{13}a_{31} + b_3\, a_{13}a_{21} - b_3\, a_{11}a_{23}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1\, a_{21}a_{32} - b_1\, a_{22}a_{31} + b_2\, a_{12}a_{31} - b_2\, a_{11}a_{32} + b_3\, a_{11}a_{22} - b_3\, a_{12}a_{21}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}}$$

が得られる.

（解答終）

【解法 II （逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdots\cdots ④$$

となる.

もしも，$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば，定理 2.2 より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

であるが，これを④の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1\tilde{a}_{11} & b_2\tilde{a}_{21} & b_3\tilde{a}_{31} \\ b_1\tilde{a}_{12} & b_2\tilde{a}_{22} & b_3\tilde{a}_{32} \\ b_1\tilde{a}_{13} & b_2\tilde{a}_{23} & b_3\tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + b_2(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ b_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + b_3(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \\ b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + b_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix}$$

から

$$x_1 = \frac{b_1\, a_{22}a_{33} - b_1\, a_{23}a_{32} + b_2\, a_{13}a_{32} - b_2\, a_{12}a_{33} + b_3\, a_{12}a_{23} - b_3\, a_{13}a_{22}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{b_1\, a_{23}a_{31} - b_1\, a_{21}a_{33} + b_2\, a_{11}a_{33} - b_2\, a_{13}a_{31} + b_3\, a_{13}a_{21} - b_3\, a_{11}a_{23}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1\, a_{21}a_{32} - b_1\, a_{22}a_{31} + b_2\, a_{12}a_{31} - b_2\, a_{11}a_{32} + b_3\, a_{11}a_{22} - b_3\, a_{12}a_{21}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となる．ここで

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

とおくことにする．

もしも， $|A| \neq 0$ であるならば，クラーメルの公式より

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

すなわち

$$x_1 = \frac{b_1\, a_{22}a_{33} - b_1\, a_{23}a_{32} + b_2\, a_{13}a_{32} - b_2\, a_{12}a_{33} + b_3\, a_{12}a_{23} - b_3\, a_{13}a_{22}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{b_1\, a_{23}a_{31} - b_1\, a_{21}a_{33} + b_2\, a_{11}a_{33} - b_2\, a_{13}a_{31} + b_3\, a_{13}a_{21} - b_3\, a_{11}a_{23}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{b_1\, a_{21}a_{32} - b_1\, a_{22}a_{31} + b_2\, a_{12}a_{31} - b_2\, a_{11}a_{32} + b_3\, a_{11}a_{22} - b_3\, a_{12}a_{21}}{a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{11}\, a_{23}a_{32} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{13}\, a_{22}a_{31}}$$

である．

（解答終）

付録3

教材4.1と教材4.2について，学生向けの解答・解説は以下の通りである．

教材4.1

【解法 I （消去法）】

①$\times 2(s+1)$は， $2(s+1)^2 x_1 + 2s(s+1)\, x_2 = 2$ であり，②$\times s$ は，$s(s+2)x + 2s(s+1)\, x_2 = s$ だから，

①$\times 2(s+1) -$②$\times s$ より

$$\{2(s+1)^2 - s(s+2)\}x_1 = 2 - s$$

$$(s^2 + 2s + 2)x_1 = -s + 2 \cdots\cdots ③$$

である．

また，①× $(s+2)$は，

$$(s+1)(s+2)x_1+s(s+2)\,x_2=\frac{s+2}{s+1}$$

であり，②× $(s+1)$ は，$(s+1)(s+2)x_1+2(s+1)^2x_2=s+1$ だから，①× $(s+2)$ −②× $(s+2)$ より

$$\{s(s+2)-2(s+1)^2\}\,x_2=\frac{s+2}{s+1}-(s+1)$$

$$(-\mathrm{s}^2-2\mathrm{s}-2)\,x_2=\frac{-\mathrm{s}^2-\mathrm{s}+1}{\mathrm{s}+1}\cdots\cdots④$$

となっている．したがって，③, ④より

$$x_1=\frac{-s+2}{s^2+2s+2}\,,\qquad x_2=\frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

【解法 II （逆行列を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots③$$

となる．さて

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)\cdot 2(s+1)-s(s+2)}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -(s+2) & s+1 \end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2s+2 & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}$$

を，③の両辺に左からかけると

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix} 2(s+1) & -s \\ -s-2 & s+1 \end{pmatrix}\frac{1}{s+1}\begin{pmatrix} 1 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\begin{pmatrix} 2(s+1)-s(s+1) \\ -s-2+(s+1)^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\begin{pmatrix} (s+1)(2-s) \\ s^2+s-1 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1=\frac{-s+2}{s^2+2s+2}\,,\qquad x_2=\frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

【解法 III （クラーメルの公式を用いる方法）】

この連立一次方程式を，行列の積によって表示すると

$$\begin{pmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．さて

$$|A| = \begin{vmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{vmatrix} = (s+1)\cdot 2(s+1) - s(s+2) = s^2+2s+2,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{s+1} & s \\ 1 & 2(s+1) \end{vmatrix} = 2-s,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} s+1 & \dfrac{1}{s+1} \\ s+2 & 1 \end{vmatrix} = s+1-\frac{s+2}{s+1} = \frac{s^2+s-1}{s+1}$$

だから

$$x_1 = \frac{-s+2}{s^2+2s+2}\,,\quad x_2 = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

である．

（解答終）

教材4.2

（解答）

関数$f(t)$に対して，$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$とすると

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

が成り立ち，微分法則と呼ばれている．

そこで，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$とおけば，微分法則より

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0)\,, \mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

が成り立つ．

連立微分方程式の各式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} \{sX(s)-x(0)\} + \{sY(s)-y(0)\} + X(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ \{sX(s)-x(0)\} + 2\{sY(s)-y(0)\} + 2X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

となるが，初期条件：$x(0) = -1$，$y(0) = 1$ を代入すると

$$\begin{cases} \{sX(s)+1\} + \{sY(s)-1\} + X(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ \{sX(s)+1\} + 2\{sY(s)-1\} + 2X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} (s+1)X(s) + sY(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ (s+2)X(s) + 2(s+1)Y(s) = 1 \end{cases}$$

となる．

この連立方程式を，$X(s)$，$Y(s)$ について解くと

$$X(s) = \frac{-s+2}{s^2+2s+2}\,, \qquad Y(s) = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

が得られる．

したがって，$X(s)$，$Y(s)$ の逆ラプラス変換を求めればよい．

$$X(s) = \frac{-s+2}{s^2+2s+2} = \frac{-(s+1)+3}{(s+1)^2+1^2} = -\frac{\mathrm{s}+1}{(\mathrm{s}+1)^2+1^2} + 3\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2s+1}{s^2+2s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+1}$$

$$= -\frac{1}{s+1} + 2\cdot\frac{\mathrm{s}+1}{(\mathrm{s}+1)^2+1} - \frac{1}{(\mathrm{s}+1)^2+1}$$

と式変形ができる．すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at},\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right] = e^{at}\cos\omega t,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right] = e^{at}\sin\omega t$$

を利用して

$$x(t) = -e^{-t}\mathrm{cos}t + 3e^{-t}\mathrm{sin}t\,,\ y(t) = -e^{-t} + 2e^{-t}\mathrm{cos}t - e^{-t}\mathrm{sin}t$$

が得られる．

（解答終）