東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.100-104

大学初年次における数学教材の提案（その 26）
～ミンコフスキーの不等式～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 26
~ Minkowski Inequality ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

よく知られている結果として，ミンコフスキーの不等式と呼ばれるものがある. これは，三角不等式を一般化したものである．この論文ではミンコフスキーの不等式を，ヘルダーの不等式を用いて証明することを目標とする．

Abstract

As a well-known result, we give the Minkowski inequality. This is a generalized triangle inequality. The purpose of this paper is to present a proof by means of the Hölder inequality.

キーワード:内積空間，ヘルダーの不等式，ミンコフスキーの不等式，三角不等式
Keywords: *Inner Product Space , Hölder Inequality , Minkowski Inequality, Triangle Inequality*

1. はじめに

直観的なイメージでは，図形における三角不等式や，次の実内積空間における

定理（三角不等式）

実内積空間Vの任意の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対して

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

の拡張概念となっているミンコフスキーの不等式について紹介する．

定理（ミンコフスキーの不等式）

$p \geqq 1$に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

というものである.

　また，有限次元の線形空間$\mathbb{R}^n$ においてよく知られている不等式の一つに，次のヘルダーの不等式と呼ばれるものがある.

定理（ヘルダーの不等式）

$p,q > 1,$

のとき

$$\sum_{r=1}^{n}|x_r y_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|x_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|y_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ.

というものであるが，ミンコフスキーの不等式は，このヘルダーの不等式と密接な関係にある [1)2)].

2. ミンコフスキーの不等式

　まず，ヘルダーの不等式を用いて次の不等式が成り立つことを示す.

定理 2.1

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (0 < p < q)$$

（証明）

　第 1 章のヘルダーの不等式において

$$P = \frac{q}{p} > 1, \qquad \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$$

と置き換えてみると

$$\sum_{r=1}^{n}|x_r y_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|x_s|^P\right)^{\frac{1}{P}}\left(\sum_{t=1}^{n}|y_t|^Q\right)^{\frac{1}{Q}}$$

の形となる．さらに $y_r = 1$ とおき，$|x_r|$を$|a_r|^p$と置き換えると

$$\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}(|a_s|^p)^P\right)^{\frac{1}{P}}\left(\sum_{t=1}^{n}1^Q\right)^{\frac{1}{Q}}$$

$$\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}(|a_s|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot n^{1-\frac{1}{P}}$$

$$\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^q\right)^{\frac{p}{q}} \cdot n^{1-\frac{p}{q}}$$

となる．両辺をn で割ると

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p \leqq n^{-\frac{p}{q}}\cdot\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

となるのであるが，この両辺を$\frac{1}{p}$ 乗すると

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq n^{-\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}|a_s|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

定理 2.2（ミンコフスキーの不等式）

$p \geqq 1$ に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．

（証明）

まず，三角不等式

$$|a_k+b_k| \leqq |a_k|+|b_k|$$

が成り立つことに留意すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p &= \sum_{k=1}^{n}(|a_k+b_k|^{p-1})|a_k+b_k| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}(|a_k+b_k|^{p-1})(|a_k| + |b_k|) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{(|a_k+b_k|^{p-1})|a_k| + (|a_k+b_k|^{p-1})|b_k|\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(|a_k+b_k|^{p-1})|a_k| + \sum_{k=1}^{n}(|a_k+b_k|^{p-1})|b_k|\end{aligned}$$

となっていることがわかる．

次に $p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ として，右辺にヘルダーの不等式を適用すると

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots(*)$$

となるが，条件 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ より $p+q=pq$ なので $q(p-1)=pq-q=p$ であるから

$$(*)=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

が得られる．両辺を

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}>0$$

で割ると

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つことが示された．

$p=1$ のときについては，三角不等式 $|a_k+b_k| \leqq |a_k|+|b_k|$ を k について加えることにより

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k| \leqq \sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k|$$

が得られる．

（証明終）

3. 積分におけるミンコフスキーの不等式

この章では，積分におけるミンコフスキーの不等式について述べる[3]．

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の可測関数 $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，その p 次ノルムを

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

と定義する．これが有限であるときに f は p 乗可積分であると言われる．これについては，以下のことが知られている．

定理 3.1

$p>1$ のとき，領域Ω上のp乗可積分関数 $f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して，和$f+g$はΩ上の可積分関数であり，三角不等式

$$\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$$

すなわち

$$\left[\int_\Omega \{f(x)+g(x)\}^p\,dx\right]^{1/p} \leqq \left[\int_\Omega \{f(x)\}^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega \{g(x)\}^p\,dx\right]^{1/p}$$

が成り立つ.

（証明） 略.

参考文献

1） 渡部隆一「不等式入門」森北出版，1969
2） 北山毅，松尾吉知，松下朝夫 共著「全問精解微積分演習」聖文社，1976
3） 矢野公一「距離空間と位相構造」共立出版，1997