東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.1,2018,pp.15-21

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 17）
～ラプラス変換を用いた積分方程式の解法～

貴田 研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.17
~ Methods of Solution of Integral Equations by means of Laplace Transforms ~

by

Kenshi KIDA*1

(received on May 30, 2018 & accepted on Jul.27, 2018)

あらまし

まず，合成積の定義とラプラス変換の関連性について述べる．さらにその応用として，ヴォルテラ型積分方程式と微分積分方程式のラプラス変換を用いた解法について紹介する．

Abstract

First, we define convolutions and give an explanation of the relationship between convolutions and Laplace transforms. Furthermore, we explain methods of solution of Volterra-type integral equations and integro-differential equations by means of Laplace transforms.

キーワード:合成積，ヴォルテラ型積分方程式，微分積分方程式

Keywords: *Convolution , Volterra-type Integral Equation , Integro-Differential Equation*

1. はじめに

大学初年次の数学で学ぶラプラス変換の定義を以下に述べる．

$f(t)$ が $t>0$ で定義され，任意の有限区間で積分可能とするときに

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

のことを $f(t)$ のラプラス積分といい，これが収束するときに，$f(t)$ に $F(s)$ を対応させる写像をラプラス変換という．また，この関数 $F(s)$ のことを元の関数 $f(t)$ のラプラス変換，または像関数と呼び，$\mathcal{L}[f(t)]$ と表す．すなわち

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

であり，像関数 $F(s)$ に対し，$f(t)$ を原関数という．

ラプラス変換が応用されるものとして，常微分方程式の初期値問題，常微分方程式の境界値問題，物理系，電気回路系，自動制御系などがある[1)]．この論文では，特殊な型の積分方程式と微分積分方程式の解法への応用について述べる．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

また，合成積（または，たたみ込み）と呼ばれる，次の定積分

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

が，どのようにして構築されるのかについても詳しく述べることとする[2)].

2. 合成積とラプラス変換

$t>0$で定義された 2 つの関数 $f(t),\ g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ$\mathcal{L}[f(t)]=F(s),\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$とするとき, 積$F(s)G(s)$ 逆ラプラス変換を考えてみる．$F(s)$ と$G(s)$ の積分変数をそれぞれu,vとすれば

$$F(s)G(s)=\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv\right)$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)du\right\}dv$$

$$=\iint_D e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv$$

となる. この二重積分の積分領域は，$D=\{(u,\ v)\mid u\geqq 0,\ v\geqq 0\}$である.

ここで，変数変換

$$u+v=t,\qquad u=\tau\cdots\cdots①$$

によって, 上の二重積分をuv系から$t\tau$系に直してみる．①から

$$u=\tau,\qquad v=t-\tau$$

となっていることがわかる．さらに，$u\geqq 0,\ v\geqq 0$ という条件があるので

$$t=u+v\geqq 0,\qquad \tau=u\geqq 0,\qquad t-\tau=v\geqq 0$$

すなわち

$$t\geqq 0,\qquad \tau\geqq 0,\qquad t\geqq\tau$$

が成り立つ.

したがって, uv 平面上の積分領域D と$t\tau$ 平面上の領域$\Omega=\{(t,\tau)\mid 0\leqq\tau\leqq t\}$との間には，1 対 1 の対応が成り立っていることがわかる．また，関数行列式（ヤコビアン）は

$$\frac{D(u,v)}{D(t,\tau)}=\begin{vmatrix}u_t & u_\tau\\ v_t & v_\tau\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

である．よって

$$F(s)G(s)=\iint_\Omega e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)|-1|dtd\tau$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^t e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt$$

が成り立つ．今，上の累次積分の{　}の中の定積分を

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \cdots\cdots ㋐$$

とおけば，ラプラス変換の定義から

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

が得られる．㋐のことを，$f(t)$, $g(t)$ の**合成積**，または**たたみ込み**という．

これについては，以下のことが成り立つ．

定理 2.1

(1) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

(2) $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$

3. ヴォルテラ型積分方程式

被積分関数に未知関数を含む方程式を積分方程式という. この章では

(I)第 1 種ヴォルテラ型積分方程式

未知関数$x(t)$と既知関数$f(t)$の合成積を含む

$$\int_0^t f(t-\tau)x(\tau)d\tau = g(t)$$

の形の積分方程式であり, アーベル型積分方程式とも呼ばれる.

(II)第 2 種ヴォルテラ型積分方程式

未知関数$x(t)$と既知関数$f(t)$の合成積を含む

$$x(t) - \int_0^t f(t-\tau)x(\tau)d\tau = g(t)$$

の形の積分方程式であり, ポアソン型積分方程式とも呼ばれる.

の 2 種類の積分方程式を，ラプラス変換を用いて解く方法について述べる．

例題 3.1[3]（**第 1 種ヴォルテラ型積分方程式**）

未知関数を$x(t)$とする積分方程式

$$\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = \sin t + t\cos t \cdots\cdots (*)$$

を解け．

（解答）

(*)は, 合成積を用いると

$$x(t) * \cos t = \sin t + t\cos t \cdots\cdots (*)$$

と書き換えることができる．そこで(∗)の両辺をラプラス変換する．

ここで, $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$とおき, さらに

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\qquad \mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

が成り立つことを利用すると

$$\frac{s}{s^2+1}\,X(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2-1}{(\,s^2+1\,)^2}$$

$$\frac{s}{s^2+1}\,X(s) = \frac{s^2+1}{(\,s^2+1\,)^2} + \frac{s^2-1}{(\,s^2+1\,)^2}$$

$$\frac{s}{s^2+1}\,X(s) = \frac{2\,s^2}{(\,s^2+1\,)^2}$$

なので

$$X(s) = \frac{2s}{s^2+1}$$

となるが

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t$$

なので

$$x(t) = 2\cos t$$

が得られる．

（解答終）

例題 3.2[4)]（第 2 種ヴォルテラ型積分方程式）

未知関数を$x(t)$とする積分方程式

$$x(t) + 3\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = 8t \cdots\cdots (**)$$

を解け．

（解答）

(∗∗)は, 合成積を用いると

$$x(t) + 3x(t) * \sin t = 8t \cdots\cdots (**)$$

と書き換えることができる．そこで(∗∗)の両辺をラプラス変換する．

ここで, $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$とおき, さらに

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\qquad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

が成り立つことを利用すると

$$X(s)+3\frac{1}{s^2+1}X(s)=\frac{8}{s^2}$$

$$\frac{s^2+4}{s^2+1}\,X(s)=\frac{8}{s^2}$$

$$X(s)=\frac{8\,(s^2+1)}{s^2\,(s^2+4)}$$

すなわち

$$X(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{6}{s^2+4}=\frac{2}{s^2}+3\frac{2}{s^2+2^2}$$

となるが

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t\,,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]=sin\omega t$$

なので

$$x(t)=2t+3\sin 2t$$

が得られる.

（解答終）

4. 微分積分方程式

未知関数の導関数と, 未知関数が被積分関数になる積分項を, 同時に併せもつ関数方程式を, 微分積分方程式という. この章では, ラプラス変換を用いて解く方法について述べる.

例題 4. 1[3]（微分積分方程式）

未知関数を$x(t)$とする微分積分方程式

$$x'(t)-2x(t)+\int_0^t x(\tau)d\tau=1-t,\qquad x(0)=1\cdots\cdots(***)$$

を解け.

（解答）

(***)の両辺をラプラス変換する.　ここで, $\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$とおき, さらに

$$\mathcal{L}[x'(t)]=sX(s)-x(0),\quad \mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}X(s),\quad \mathcal{L}[1]=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$$

が成り立つことを利用すると

$$\{sX(s)-x(0)\}-2X(s)+\frac{1}{s}X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}$$

$$\{sX(s)-1)\}-2X(s)+\frac{1}{s}X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}$$

$$\left(\frac{s^2}{s}-\frac{2s}{s}+\frac{1}{s}\right)X(s)=\frac{s}{s^2}-\frac{1}{s^2}+\frac{s^2}{s^2}$$

$$\frac{(s-1)^2}{s}X(s)=\frac{s^2+s-1}{s^2}$$

なので

$$X(s)=\frac{s^2+s-1}{s(s-1)^2}$$

となる．ここで

$$\frac{s^2+s-1}{s(s-1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}\qquad (A,B,C\text{ は定数})$$

とおいて，両辺に$s(s-1)^2$ をかけると

$$s^2+s-1=A\,(s-1)^2+Bs(s-1)+Cs\cdots\cdots(1)$$

となる．

(1) の両辺に$s=0$ を代入すると$-1=A$ が得られ，また (1) の両辺に$s=1$ を代入すると$1=C$ が得られ，さらに (1) の両辺に$s=2$ を代入すると$5=A+2B+2C$ が得られる．

したがって

$$A=-1\,,\qquad B=2\,,\qquad C=1$$

が得られるので

$$X(s)=\frac{-1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

と変形しておく．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at},\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at}$$

を利用すると

$$x(t)=-1+2e^t+te^t$$

が得られる．

（解答終）

（別解）

(***) の両辺をt で微分する．

$$\frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)d\tau=x(t)$$

であるから

$$x''(t)-2x'(t)+x(t)=-1\cdots\cdots(****)$$

が得られる．また，(***) の両辺に$t=0$を代入すると

$$\int_0^0 x(\tau)d\tau = 0$$

なので

$$x'(0) - 2x(0) + \int_0^0 x(\tau)d\tau = 1 - 0$$

$$x'(0) - 2 \times 1 + 0 = 1$$

より

$$x'(0) = 3$$

であることがわかる.

(****)の両辺をラプラス変換する. ここで, $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$とおき, さらに

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0), \qquad \mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0), \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

が成り立つことを利用すると

$$\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\} - 2\{sX(s) - x(0)\} + X(s) = -\frac{1}{s}$$

$$\{s^2X(s) - s - 3\} - 2\{sX(s) - 1\} + X(s) = -\frac{1}{s}$$

$$(s^2 - 2s + 1)X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s^2}{s} + \frac{s}{s}$$

$$(s-1)^2X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s}$$

なので

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s(s-1)^2}$$

となる. 上述の(解答)と同様に

$$X(s) = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

と変形できるので

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = te^{at}$$

を利用すると

$$x(t) = -1 + 2e^t + te^t$$

が得られる.

(解答終)

参考文献

1) 田代嘉宏「ラプラス変換とフーリエ解析要論　第2版」森北出版, 2004
2) 上野健爾監修, 高専の数学教材研究会「応用数学」森北出版, 2013
3) 水本久夫「ラプラス変換入門」森北出版, 1984
4) 楠田信, 平居孝之, 福田亮治「使える数学　フーリエ・ラプラス変換」共立出版, 1997