東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.20-25

論文

列生成法に基づく時間枠付き多品目在庫運搬経路問題の解法

三村 健斗[*1]，森山 弘海[*2]

A Column Generation Based Algorithm for a Multi-item Inventory Routing Problem with Time Windows

by

Kento MIMURA[*1] and Hiroumi MORIYAMA[*2]

(received on Sep. 29, 2017 & accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

デポから複数台の運搬車で多数の顧客の多期間にわたる需要を運搬するとき，運搬費用と在庫保管費用の総和が最小となるように，各期間における各顧客への運搬量と各運搬車のルートを同時に決定する問題を在庫運搬経路問題という．当研究では，各顧客の多品目の需要と時間枠を考慮した場合の在庫運搬経路問題を取り上げる．最初に，この問題を混合0-1整数計画問題に定式化する．次いで，列生成法に基づくこの問題の近似解法を提案する．そして最後に，提案法の有効性を数値実験を通して検証する．

Abstract

Suppose various quantities of a single item have to be delivered from one depot to many customers using a fleet of vehicles to satisfy a given demand over several periods. In such cases, the inventory routing problem consists of simultaneously determining the quantity to be delivered to each customer and the route of each vehicle in each period so as to minimize the sum of the routing costs and inventory holding costs. In this paper, we consider an inventory routing problem with multiple items and time windows (in each period) and propose a column generation-based algorithm to solve the problem.

キーワード:在庫運搬経路問題，多品目，時間枠，列生成法，混合0-1整数計画法

Keywords: *Inventory Routing Problem, Multiple Items, Time Windows, Column Generation, Mixed 0-1 Integer Programming*

1. はじめに

デポ（運搬センター）から複数台の運搬車で多数の顧客の多期間にわたる需要を運搬するとき，運搬費用と在庫保管費用の総和が最小となるように，各期間における各顧客への運搬量と各運搬車のルート（デポを出発したあと，いくつかの顧客を巡回し，再びデポに戻る閉路）を同時に決定する問題を在庫運搬経路問題（Inventory Routing Problem）という．

在庫運搬経路問題は，荷物を運搬する供給者（デポ）側と荷物が運搬される需要者（顧客）側が同一企業である場合の運搬現場や，供給者側が需要者側の在庫管理を主導して行うベンダー管理在庫（Vender Managed Inventory; VMI）を採用している運搬現場において発生する問題であり，これまでに数多くの研究[1)2)]があるが，それらの多くは，各顧客における需要が単一品目である場合を対象としている．しかし，実務においては，多品目の需要を対象としなければならない場合も多い．また，実際の運搬現場においては，各顧客へ需要を運搬する1期間内の時刻が所与の時間枠（何時から何時までの間）に入っていなければならないという条件を考慮しなければならない場合[3)]も存在する．それゆえ，多数の顧客の多期間にわたる多品目の需要量が与えられているとき，それらをデポから複数台の運搬車で各顧客に運搬する場合には，各顧客の時間枠を考慮した上で，運搬費用と在庫保管費用の総和が最小となるように，各期間における各顧客への運搬量と各運搬車のルートを同時に決定する問題が発生する．そこで当研究では，この問題を時間枠付き多品目在庫運搬経路問題と呼び，列生成法に基づくその近似解法を提案する．

上述のように，在庫運搬経路問題に関しては既に数多くの研究がある（2008年までの研究は文献[1)]，2012年までの研究は文献[2)]にサーベイされている）．例えば，Archettiら[4)]はタブーサーチ法と混合整数計画法に基づく，Campbellら[5)]は2段階法に基づく，Coelhoら[6)]は適応型大近傍探索法に基づくこの問題の近似解法を提案している．また，Adulyasakら[7)]とCoelhoら[8)]は分枝カット法に基づくこの問題の最適解法を提案している．しかしながら，これらの研究はいずれも各顧客の時間枠と多品目の需要を同時に考慮していない．

以下では，次の2.で時間枠付き多品目在庫運搬経路問題を混合0-1整数計画問題に定式化する．次いで，

*1 情報通信学研究科情報通信学専攻 修士課程
Graduate School of Information and Telecommunication Engineering, Course of Information and Telecommunication Engineering, Master’s Program
*2 情報通信学部経営システム工学科 教授
School of Information and Telecommunication Engineering, Department of Management Systems Engineering, Professor

3.において列生成法に基づく近似解法を提案するとともに，4.において列を生成するための列生成部分問題を設定する．そして5.では，提案法の有効性を数値実験で検証する．

2. 混合0-1整数計画問題への定式化

需要点（顧客）の集合を $N=\{1,2,\cdots,n\}$，供給点（デポ）を 0 とし，需要点と供給点を合わせた拠点の集合を $N_0=N\cup\{0\}$ とする．また，品目の集合を $G=\{1,2\cdots,g\}$，計画期間の集合を $P=\{1,2,\cdots,p\}$，運搬車台数を K，ルートの集合を $R=\{1,2,\cdots,r\}$ とする．さらに，

- Q ： 運搬車の最大積載量
- d_{ijk} ： 需要点 $i\in N$ での品目 $j\in G$ の期間 $k\in P$ における需要量
- f_{jk} ： 供給点 0 での品目 $j\in G$ の期間 $k\in P$ における補充量
- e_{ij} ： 拠点 $i\in N_0$ での品目 $j\in G$ の初期在庫量
- U_{ik} ： 拠点 $i\in N_0$ の期間 $k\in P\cup\{0\}$ における在庫量の上限
- c_l ： ルート $l\in R$ の運搬費用（移動費用）
- h_{ij} ： 拠点 $i\in N_0$ での品目 $j\in G$ の1期間当り単位量当り在庫保管費用

とする．ただし，一般性を失うことなく $U_{i0}=\sum_{j\in G}e_{ij}$，$i\in N_0$ であるものとする．そして，ルート $l\in R$ に含まれる需要点の集合を $N_l(\subseteq N)$ とし，次を定義する．

$$\alpha_{il}=\begin{cases}1, & i\in N_l\\ 0, & \text{その他}\end{cases},\quad i\in N, l\in R \tag{1}$$

このとき，変数 x_{kl}，q_{ijkl}，I_{ijk} を

$$x_{kl}=\begin{cases}1, & \text{期間 } k \text{ においてルート } l \text{ で運搬する場合}\\ 0, & \text{その他}\end{cases},\quad k\in P, l\in R$$

- q_{ijkl} ： 需要点 $i\in N$ への品目 $j\in G$ の期間 $k\in P$ におけるルート $l\in R$ による運搬量
- I_{ijk} ： 拠点 $i\in N_0$ での品目 $j\in G$ の期間 $k\in P\cup\{0\}$における在庫量

とすると，前述の時間枠付き多品目在庫運搬経路問題は，混合0-1整数計画問題：

$$\text{(MP)}\quad \min.\ \sum_{k\in P}\sum_{l\in R}c_l x_{kl}+\sum_{i\in N_0}\sum_{j\in G}\sum_{k\in P\cup\{0\}}h_{ij}I_{ijk} \tag{2}$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{l\in R}\alpha_{il}x_{kl}\le 1,\quad i\in N, k\in P \tag{3}$$

$$\sum_{l\in R}x_{kl}\le K,\quad k\in P \tag{4}$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in G}\alpha_{il}\,q_{ijkl}\le Qx_{kl},\ k\in P, l\in R \tag{5}$$

$$I_{0jk}=I_{0j,k-1}+f_{jk}-\sum_{i\in N}\sum_{l\in R}\alpha_{il}\,q_{ijkl},\quad j\in G, k\in P \tag{6}$$

$$I_{ijk}=I_{ij,k-1}+\sum_{l\in R}\alpha_{il}\,q_{ijkl}-d_{ijk},\quad i\in N, j\in G, k\in P \tag{7}$$

$$I_{ij0}=e_{ij},\quad i\in N_0, j\in G \tag{8}$$

$$\sum_{j\in G}I_{ijk}\le U_{ik},\quad i\in N_0, k\in P\cup\{0\} \tag{9}$$

$$x_{kl}\in\{0,1\},\quad k\in P, l\in R \tag{10}$$

$$q_{ijkl}\ge 0,\quad i\in N, j\in G, k\in P, l\in R \tag{11}$$

$$I_{ijk}\ge 0,\quad i\in N_0, j\in G, k\in P \tag{12}$$

に定式化される．ここで，式(2)は目的関数で総運搬費用と総在庫保管費用の和を最小化することを表す．そして式(3)は，運搬車が各需要点に各期間においてたかだか 1 度だけ巡回することを規定する．式(4)は，各期間で使用する運搬車が所与の運搬車台数以下であることを規定する．式(5)は，各運搬車のルートにおける運搬量は最大積載量以下であることを規定する．また，式(6)は供給点における各品目の在庫量，補充量，運搬量の関係を，式(7)は各需要点における各品目の在庫量，運搬量，需要量の関係を規定する．また，式(8)は各拠点での各品目の初期在庫量を，式(9)は各拠点での各品目の各期間における在庫量の上限を規定する．

なお，次式の $\beta_{ik'k''}$ を定義すると，この $\beta_{ik'k''}$ は需要点 i の期間 k' から期間 k'' の需要量を満たすのに必要なその期間内の最小運搬回数となる．ただし，E は $E=\{(k',k'')\in P\times P\,|\,k'\le k''\}$ であり，$\lceil\cdot\rceil$ は・以上の最小の整数である．

$$\beta_{ik'k''}=\left\lceil\frac{\sum_{j\in G}\sum_{k=k'}^{k''}d_{ijk}-U_{i,k'-1}}{Q}\right\rceil,\quad i\in N, (k',k'')\in E \tag{13}$$

よって，(MP) の実行可能解は明らかに以下の式を満たす．

$$\sum_{k=k'}^{k''}\sum_{l\in R}\alpha_{il}\,x_{kl}\ge\beta_{ik'k''},\quad i\in N, (k',k'')\in E \tag{14}$$

そこで以下では，(MP)に式(14)を加えた問題を改めて(MP)とする．

3. 列生成法に基づく近似解法

既述のように，時間枠付き多品目在庫運搬経路問題は，考えられる全てのルートを列挙すれば，混合0-1整数計画問題 (MP) に定式化できる．しかし，ルートの数は一般に膨大な数になるため，全てのルートを列挙することは，それ自身が極めて多くの計算量を必要とし実際的でない．そこで以下では，ルートを逐次列挙しながら (MP) の下界値を求める列生成法を提案し，その列生成法で列挙したルートを用いて (MP) の上界値（実行可能解）を求める近似解法を構築する．

いま，(MP) の式(10)を $x_{kl}\ge 0$, $k\in P, l\in R$ に緩和した連続緩和問題：

$$(\overline{\text{P}})\quad \min.\ \sum_{k\in P}\sum_{l\in R}c_l x_{kl}+\sum_{i\in N_0}\sum_{j\in G}\sum_{k\in P\cup\{0\}}h_{ij}I_{ijk} \tag{15}$$

$$\text{s. t.}\quad \text{式(3)〜(9),(11),(12),(14)}$$

$$x_{kl}\ge 0,\quad k\in P, l\in R \tag{16}$$

を考える．ここで，問題 $(\cdot)$ の最適値を $z(\cdot)$ と記すと，緩和法の原理より，$z(\text{MP})\ge z(\overline{\text{P}})$ である．よって，$(\overline{\text{P}})$

を解けば (MP) の下界値が求まる．さらに，R のある部分集合 $\bar{R}$ を考え，$(\bar{\mathrm{P}})$ におけるルートの集合 R を $\bar{R}$ に限定した限定主問題 $(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ と，その双対問題：

$$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})\quad \max.\quad -\sum_{i\in N}\sum_{k\in P}u_{ik}-K\sum_{k\in P}v_k+\sum_{j\in G}\sum_{k\in P}f_{jk}\lambda_{0jk} -\sum_{i\in N}\sum_{j\in G}\sum_{j\in P}d_{ijk}\lambda_{ijk}+\sum_{i\in N_0}\sum_{j\in G}e_{ij}\lambda_{ij0} -\sum_{i\in N_0}\sum_{k\in P\cup\{0\}}U_{ik}\mu_{ik} +\sum_{i\in N}\sum_{(k',k'')\in E}\beta_{ik'k''}\nu_{ik'k''} \tag{17}$$

$$\text{s.t.}\quad -\sum_{i\in N}\alpha_{il}u_{ik}-v_k+Qw_{kl} +\sum_{i\in N}\sum_{(k,k')\in E_k}\alpha_{il}\nu_{ik'k''}\le c_l,\quad k\in P,l\in\bar{R} \tag{18}$$

$$\lambda_{ijk}-\lambda_{ij,k+1}-\mu_{ik}\le h_{ij},\quad i\in N_0,j\in G,k\in P\cup\{0\}\setminus\{p\} \tag{19}$$

$$\lambda_{ijp}-\mu_{ip}\le h_{ij},\quad i\in N_0,j\in G \tag{20}$$

$$\alpha_{il}\lambda_{0jk}-\alpha_{il}\lambda_{ijk}\le\alpha_{il}w_{kl},\quad i\in N,j\in G,k\in P,l\in\bar{R} \tag{21}$$

$$u_{ik}\ge 0,\quad i\in N,k\in P \tag{22}$$

$$v_k\ge 0,\quad k\in P \tag{23}$$

$$w_{kl}\ge 0,\quad k\in P,l\in\bar{R} \tag{24}$$

$$\mu_{ik}\ge 0,\quad i\in N_0,k\in P\cup\{0\} \tag{25}$$

$$\nu_{ik'k''}\ge 0,\quad i\in N,(k',k'')\in E \tag{26}$$

を考える．ただし，$E_k=\{(k',k'')\in E|k'\le k\le k''\},k\in P$ である．ここで，$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の $(u_{ik}),(v_k),(w_{kl}),(\lambda_{0jk}),(\lambda_{ijk}),(\lambda_{ij0}),(\mu_{ik}),(\nu_{ik'k''})$ はそれぞれ $(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ の式(3)～(9),(14)に対応する双対変数であり，双対定理より $z(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})=z(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ である．このとき，$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の最適解における $w_{kl}\ge 0,k\in P,l\in\bar{R}$ は，式(17),(18)より，できる限り小さい値に設定すればよく，式(21)の左辺の値以上の最小値となる．すなわち，$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の最適解においては

$$w_{kl}=\max_{i\in N_l}\left\{\max_{j\in G}\{0,\lambda_{0jk}-\lambda_{ijk}\}\right\},\quad k\in P,l\in\bar{R} \tag{27}$$

が成り立つ．そこで $(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ の最適解を $(\bar{x}_{kl})$, $(\bar{q}_{ijkl})$, $(\bar{I}_{ijk})$ とし，$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の最適解を $(\bar{u}_{ik})$, $(\bar{v}_k)$, $(\bar{w}_{kl})$, $(\bar{\lambda}_{0jk})$,$(\bar{\lambda}_{ijk})$, $(\bar{\lambda}_{ij0})$, $(\bar{\mu}_{ik})$, $(\bar{\nu}_{ik'k''})$とし，

$$c_l^k=c_l+\sum_{i\in N_l}\bar{u}_{ik}+\bar{v}_k-\mathrm{Q}\max_{i\in N_l}\left\{\max_{j\in G}\{0,\bar{\lambda}_{0jk}-\bar{\lambda}_{ijk}\}\right\} -\sum_{i\in N_l}\sum_{(k',k'')\in E_k}\bar{\nu}_{ik'k''},\quad k\in P,l\in R \tag{28}$$

とおく．このとき，

$$c_{l^*}^k=\min_{l\in R}c_l^k,\quad k\in P \tag{29}$$

である $c_{l^*}^k$ を定めると，$c_{l^*}^k\ge 0,k\in P$ ならば，$(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の最適解は $(\bar{\mathrm{P}})$ の双対問題の最適解となり，

$$x_{kl}^*=\begin{cases}\bar{x}_{kl}, & k\in P,l\in\bar{R}\\ 0, & \text{その他}\end{cases},\quad k\in P,l\in R \tag{30}$$

$$q_{ijkl}^*=\begin{cases}\bar{q}_{ijkl}, & i\in N,j\in G,k\in P,l\in\bar{R}\\ 0, & \text{その他}\end{cases},\quad i\in N,j\in G,k\in P,l\in R \tag{31}$$

$$I_{ijk}^*=\bar{I}_{ijk},\quad i\in N_0,j\in G,k\in P \tag{32}$$

である (x_{kl}^*), (q_{ijkl}^*), (I_{ijk}^*) は $(\bar{\mathrm{P}})$ の最適解となる．

以上より，当研究では，概略，次のような手順で (MP) の実行可能解を求めることを考える．

手順　列生成法に基づく近似解法

S0.　初期ルートを生成し，それらの集合を $\bar{R}$ とおく．

S1.　$(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ の最適解 $(\bar{x}_{kl}),(\bar{q}_{ijkl}),(\bar{I}_{ijk})$ と $(\bar{\mathrm{D}}_{\bar{R}})$ の最適解 $(\bar{u}_{ik}),(\bar{v}_k),(\bar{w}_{kl}),(\bar{\lambda}_{0jk}),(\bar{\lambda}_{ijk}),(\bar{\lambda}_{ij0}),(\bar{\mu}_{ik}),(\bar{\nu}_{ik'k''})$ を求める．

S2.　$c_{l^*}^k\ge 0,k\in P$ ならばS4へ．

S3.　$c_{l^*}^k<0$ であるルートの集合 R^* を求め，$\bar{R}:=\bar{R}\cup R^*$ としてS1へ．

S4.　$(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ に $x_{kl}\in\{0,1\},k\in P,l\in\bar{R}$ を追加した問題 $(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ を設定し，それを解いて (MP) の実行可能解 $(x_{kl}),(q_{ijkl}),(I_{ijk})$ を求める．

この手順のS0においては，初期ルートを求める必要があるが，ここでは，S1における $(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ の実行可能性を保証するために，最大積載量が総需要量と等しい架空の運搬車で全ての需要点を巡回する移動費用が ∞ のダミーのルートを定め，それを初期ルートの１つとする．さらに，通常の（1期間の）時間枠付き（容量制約なし）運搬経路問題にセービング法[9]を適用し，その計算過程で求まる全てのルートの集合 R も初期ルートとする．

また，S4においては $(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ の最適解を数理計画ソルバーを用いて求めるものとするが，$(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ における $\bar{R}$ は全てのルートの集合であるとは限らないため，$(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ の最適解が (MP) の最適解になるとは限らない．加えて，$(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ は $|P|\times|\bar{R}|$ 個の0–1変数を含むため，問題の規模が大きくなると，$(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ 最適解を数理計画ソルバーで求めることが困難となる．そこでここでは，$(\mathrm{MP}_{\bar{R}})$ を数理計画ソルバーで解く際には，問題の規模を縮小化するために，S1で求まる $(\bar{\mathrm{P}}_{\bar{R}})$ の最適解 $(\bar{x}_{kl})$ において1度も基底変数とならなかった変数を0に固定するものとする．さらに，この手順のS2とS3においては，式(29)の $c_{l^*}^k$ を求める必要があるが，その方法については次節で説明する．

4. 列生成部分問題の設定

ここでは，式(29)の $c_{l^*}^k$ を求めるための列生成部分問題（価格付け問題）を混合0–1整数計画問題に定式化する．

いま，$V=N_0\cup\{n+1\}$ である V を点の集合とし，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$ である A を枝の集合とするグラフ $G=(N,A)$ を考える．ただし，

$$A_1=\{(0,i')\in V\times V\mid i'\in N\} \tag{33}$$

$$A_2=\{(i,i')\in V\times V\mid i,i'\in N,i\ne i'\} \tag{34}$$

$$A_3=\{(i,n+1)\in V\times V\mid i\in N\} \tag{35}$$

である．また，

$c_{ii'}$　：　拠点 $i\in N_0$ から拠点 $i'\in N_0$ への移動費用

$t_{ii'}$　：　拠点 $i\in N_0$ から拠点 $i'\in N_0$ への移動時間

s_i　：　需要点 $i\in N$ のサービス時間（積み降ろし時間，伝票処理時間，検品時間等の総和）

a_0　：　供給点0における1期間内の最早出発時刻

b_0　：　供給点0における1期間内の最遅到着時刻

a_i　：　需要点 $i\in N$ における1期間内の最早サー

ビス開始時刻

b_i ： 需要点 $i \in N$ における1期間内の最遅サービス開始時刻

とし，$c_{i,n+1} = c_{i0}, i \in N,\ t_{i,n+1} = t_{i0}, i \in N,\ s_0 = 0$ とする．さらに，グラフ $G = (N, A)$ 上の枝 $(i, i') \in A$ と点 $i \in V$ に $c_{l^*}^k$ を求めるための次のような重み $\bar{c}_{ii'}^k$ と $\bar{w}_i^k$ を定める．

$$\bar{c}_{ii'}^k = \begin{cases} c_{ii'}, & (i, i') \in A_1 \\ c_{ii'} + \bar{u}_{ik} - \sum_{(k', k'') \in E_k} \bar{v}_{ikk'}, & (i, i') \in A_2 \cup A_3' \end{cases}$$
$$(i, i') \in A \quad (36)$$

$$\bar{w}_i^k = \max_{j \in G} \{0, \bar{\lambda}_{0jk} - \bar{\lambda}_{ijk}\}, \quad i \in N \quad (37)$$

このとき，変数 $y_{ii'}$，z_i，η_i を

$$y_{ii'} = \begin{cases} 1, \text{運搬車が拠点 } i \text{ から拠点 } i' \text{ へ移動する場合} \\ 0, \text{その他} \end{cases}, \ (i, i') \in A$$

z_0 ： 運搬車の運搬開始時刻

z_{n+1} ： 運搬車の運搬終了時刻

z_i ： 需要点 $i \in N$ におけるサービス開始時刻

$$\eta_i = \begin{cases} 1, \text{需要点 } i \text{ の重み } \bar{w}_i^k \text{ を選択する場合} \\ 0, \text{その他} \end{cases}, i \in N$$

とすると，列生成部分問題は混合0–1整数計画問題：

$$(\mathrm{SP}^k) \quad \min. \sum_{(i,i') \in A} \bar{c}_{ii'}^k\, y_{ii'} + \bar{v}_k - Q \sum_{i \in N} \bar{w}_i^k \eta_i \quad (38)$$

$$\mathrm{s.t.} \sum_{i' \in V_0^+} y_{0i'} = 1 \quad (39)$$

$$\sum_{i' \in V_i^-} y_{i'i} = \sum_{i' \in V_i^+} y_{ii'}, \quad i \in N \quad (40)$$

$$\sum_{i \in V_{n+1}^-} y_{i,n+1} = 1 \quad (41)$$

$$z_i + s_i + t_{ii'} - M(1 - y_{ii'}) \le z_{i'}, \quad (i, i') \in A \quad (42)$$

$$a_i \le z_i \le b_i, \quad i \in V \quad (43)$$

$$\sum_{i \in N} \eta_i \le 1 \quad (44)$$

$$\sum_{i' \in V_i^+} y_{ii'} \ge \eta_i, \quad i \in N \quad (45)$$

$$y_{ii'} \in \{0,1\}, \quad (i, i') \in A \quad (46)$$

$$\eta_i \in \{0,1\}, \quad i \in N \quad (47)$$

に定式化される．ただし，$V_i^+ (\subseteq V)$ は点 i から隣接している点の集合であり，$V_i^- (\subseteq V)$ は点 i へ隣接している点の集合である．また，M は十分に大きい数である．ここで，式(38)は目的関数で最適値が式(29)の $c_{l^*}^k$ になることを表す．そして式(39), (40), (41)はルートが生成されることを規定する．また，式(42), (43)は，供給点における運搬開始時刻と運搬終了時刻および各需要点におけるサービス開始時刻が所与の時間枠を満たすことを規定する．さらに，式(44), (45)は，運搬車が訪問する需要点の中で重み $\bar{w}_i^k$ が最大の需要点 i を目的関数の第３項において選択することを規定する．

当研究では，この (SP^k) を数理計画ソルバーで解いて $c_{l^*}^k$ を求めるが，式(42)のような十分に大きな数 M を含んだ定式化は一般に多くの計算時間を必要とするため，M の値をできる限り小さい値に変更することで式(42)を強化することを考える．

式(42)は $y_{ii'} = 0$ であるとき，$z_i + s_i + t_{ii'} - z_{i'} \le M$, $(i, i') \in A$ となるが，式(43)より $z_i \le b_i$，$z_{i'} \ge a_{i'}$ であるため，式(42)の M の値を $b_i + s_i + t_{ii'} - a_{i'}$ に設定しても，式(42)はすべての実行可能解に対して成立する．よって，式(42)は $M > 0$ である場合のみ意味があることに注意すると，式(42)の M を $\max\{0, b_i + s_i + t_{ii'} - a_{i'}\}$ で置き換えることができる．さらに，式(42)の $(i, i') \in A_2$ に対応した制約式と式(43)の $i \in V \setminus \{0\}$ に対応した上限・下限制約式は，持ち上げ（lifting）操作[10]を適用することにより，次のような強化した制約式に書き換えることができる．

$$z_i + s_i + t_{ii'} - \max\{0, b_i + s_i + t_{ii'} - a_{i'}\}(1 - y_{ii'}) + \max\{0, \min\{a_{i'} - a_i, -s_{i'} - t_{i'i}\} + b_i - a_{i'}\} y_{ii'} \le z_{i'} \quad (48)$$

$$a_i + \sum_{i' \in V_i^-} \max\{0, a_{i'} + s_{i'} + t_{ii'} - a_i\} y_{ii'} \le z_i, i \in V \setminus \{0\} \quad (49)$$

$$z_i \le b_i - \sum_{i' \in V_i^+} \max\{0, b_i - b_{i'} + s_i + t_{ii'}\} y_{ii'}, \ i \in V \setminus \{0\} \quad (50)$$

そこで当研究では，上記のように強化された問題 (SP^k) を数理計画ソルバーで解いて $c_{l^*}^k$ を求めるが，列生成法に基づく近似解法のS2においては，常に $c_{l^*}^k, \forall k \in P$ を求める必要はなく，$c_l^k < 0, \exists k \in P$ であるルート l が求まればS3へ計算を進めることができる．また，S3においても，常に $c_{l^*}^k < 0$ であるルート l^* の集合 R^* を求める必要はなく，$c_l^k < 0, \exists k \in P$ であるルート l を $R^* = \{l\}$ とすることができる．そこでここでは，(SP^k) の最適解を常に求めるのではなく，目的関数値が負の実行可能解が求まった時点で (SP^k) の計算を終了するものとする．

5. 数値実験による検証

以上，時間枠付き多品目在庫運搬経路問題の列生成法に基づく近似解法を提案したが，その有効性を検証するために数値実験を実施した．ただし，実験で使用した問題例の作成方法は以下の (1)～(12) の通りである．

(1) 需要点数 n は $n = 10, 20, 30$ の３通り，品目数 g は $g = 5, 10, 15$ の３通り，計画期間数 p は $p = 5, 10, 15$ の３通りを実施した．

(2) 拠点 $i \in N_0$ から拠点 $j \in N_0$ への移動費用 c_{ij} と拠点 $i \in N_0$ から拠点 $j \in N_0$ への移動時間 t_{ij} は，供給点の座標を $(50, 50)$ とし，需要点の座標を $[0, 100] \times [0, 100]$ の一様整数乱数で定めたあと，拠点 $i, j \in N_0$ 間のユークリッド距離 Δ_{ij} を求め，次式で決定した．

$$c_{ij} = \Delta_{ij} \times 0.1 \quad (51)$$

$$t_{ij} = \Delta_{ij} \quad (52)$$

(3) 需要点 $i \in N$ のサービス時間 s_i は $s_i = 10$ とした．

(4) 供給点 0 における運搬車の1計画期間内の最早出発時刻 a_0 は $a_0 = 0$ とし，供給点 0 における運搬車の1計画期間内の最遅到着時刻 b_0 は $b_0 = 300, 500, 700$ の３通りを実施した．

(5) 需要点 $i \in N$ における1計画期間内の最早サービス開始時刻 a_i と需要点 $i \in N$ における1計画期間内の最遅サービス開始時刻 b_i は，まず，

$$ct_i = U[a_0 + t_{0i}, b_0 - t_{i0} - s_i] \tag{53}$$

$$wt_i = U[5, 15] \tag{54}$$

を定めたあと，次式で決定した．

$$a_i = \max\{a_0,\ ct_i - wt_i\} \tag{55}$$

$$b_i = \max\{b_0,\ ct_i + wt_i\} \tag{56}$$

ただし，$U\left[a_0 + t_{0j}, b_0 - t_{i0} - s_i\right]$ は $\left[a_0 + t_{0j}, b_0 -\right.$ $ti0-si$ の一様整数乱数であり，$U5,\ 15$ は $5,\ 15$ の一様整数乱数である．

(6) 運搬車の最大積載量 Q は $Q = 300 \times g$ とした．

(7) 需要点 $i \in N$ での品目 $j \in G$ の期間 $k \in P$ における需要量 d_{ijk} は次式で定めた．

$$d_{ijk} = U[0, 100] \tag{57}$$

ただし，$U[0, 100]$ は $[0, 100]$ の一様整数乱数である．

(8) 運搬車台数 K は次式で定めた．

$$K = \left\lceil \frac{\sum_{i \in N} \sum_{j \in G} \sum_{k \in P} d_{ijk}}{p \cdot 0.5 \cdot Q} \right\rceil \tag{58}$$

ただし，$\lceil \cdot \rceil$ は・以上の最小の整数である．

(9) 供給点 0 の品目 $j \in G$ の期間 $k \in P$ における補充量 f_{jk} は次式で定めた．

$$f_{jk} = 100 \times n \tag{59}$$

(10) 拠点 $i \in N_0$ での品目 $j \in G$ の初期在庫量 e_{ij} は $e_{ij} = 0$ とした．

(11) 供給点 0 の期間 $k \in P$ における在庫量の上限 U_{0k} は $U_{0k} = 50 \times n \times g \times p$ とし，需要点 $i \in N$ の期間 $k \in P$ における在庫量の上限 U_{ik} は $U_{ik} = 300 \times g$ とした．

(12) 拠点 $i \in N_0$ での品目 $j \in G$ の1期間当り単位量当り在庫保管費用 h_{ij} は $h_{ij} = 0.01$ とした．

また，実験環境は以下の(1)～(3)の通りである．

(1) 使用計算機はIntel® Core™i7-4770 CPU 3.40GHzのCPUと8GBのメモリを搭載したPC（OS：Windows 7 professional 64bit SP1）で，使用言語はC#（処理系：Microsoft Visual Studio Express 2013 for Window Desktop）である．

(2) 使用した数理計画ソルバーはGurobi Optimizer Version 6.0[11]である．

(3) 列生成法に基づく近似解法のS4における数理計画ソルバーの計算は，相対誤差（$=$(上界値$-$下界値/下界値)が 0.05 以下の実行可能解が求まれば終了とした．

以上の環境の下で実施した数値実験の結果をTable 1～3に示す．ここで，Table 1～3は品目数 g をそれぞれ5，10，15とした場合の結果である．また，表中の ε は実行可能解の相対誤差，$cols$ は生成した列数，$time$ は計算時間で単位は秒である．

この数値実験では，期間数 p が5～15，需要点数 n が10～30，品目数 g が5～15，供給点の最早出発時刻 a_0 が0でかつ最遅到着時刻 b_0 が300～700である問題に対して，当研究の解法を用いて相対誤差0.07以下の解を計算時間2500秒以内で求めることができた．また，全問題の平均としては相対誤差0.03の解を求めることができた．

さらに，この数値実験の結果は，期間数 p，需要点数 n，品目数 g が大きくなるほど（問題の規模が増大するため当然のことではあるが）計算時間が増大する傾向を示している．また，問題の規模が同じならば b_0 が大きくなるほど計算時間が増大する傾向を示している．この傾向の理由としては，b_0 が大きくなるほど供給点における1期間内の最早出発時刻と最遅到着時刻の範囲が拡大し，実行可能なルートの組み合せが増加することから，数理計画ソルバーによる列生成部分問題の求解に時間を要するためと考えられる．

6. おわりに

当研究では，時間枠付き多品目在庫運搬経路問題を取り上げ，列生成法に基づくその近似解法を提案した．そして，提案した解法の有効性を検証するための数値実験を実施した．その結果，需要点数が10～30，品目数が5～15，期間数が5～15，供給点の最出発時刻が0でかつ最遅到着時刻が300～700の問題であれば，提案した解法で相対誤差0.07以下の解（全問題の平均としては相対誤差0.03の解）が計算時間2500秒以内で求まることを検証した．

しかしながら，実際の運搬現場においては，需要点数が30以上，品目数が15以上，期間数が15以上である場合も多々発生するものと思われる．それゆえ今後，解の改善方法や問題の縮小化方法を開発し，求まる解を更に改良するとともに，計算時間の更なる短縮化を図る必要がある．

なお，当研究では列生成部分問題の求解に数理計画ソルバーを用いているが，列生成法の効率は一般に，列生成部分問題の求解効率に依存する．そのため，提案法の一層の高速化においては，今後，列生成部分問題に対する効率的な解法の開発が必要であることを付記しておく．

参考文献

1) H. Andersson, A. Hoff, M. Chrisiansen, G. Hasle and Løkketangen, "Industrial Aspects and literature Survey: Combined Inventory Management and Routing" Computers & Operations Reserach Vol.37, pp.1515-1536, 2010

2) L. C. Coelho, J. -F. Cordeau, and G. Laporte, "Thirty Years of Inventory Routing" Transportation Science Vol.48, pp.1-19, 2014

3) M. M. Solomon and J. Desrosiers, "Time Windows Constrained Routing and Scheduling Problems" Transportation Science, Vol.22, pp.1-13, 1988

Table 1 Computational results ($g = 5$)

			$b_0 = 300$			$b_0 = 500$			$b_0 = 700$		
p	n	K	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*
5	10	4	0.055	24	0.971	0.042	31	1.319	0.062	34	0.884
	20	7	0.043	71	8.504	0.062	63	13.595	0.058	73	13.665
	30	11	0.061	125	27.278	0.058	135	47.150	0.053	133	51.844
10	10	4	0.020	24	0.925	0.030	34	1.809	0.023	35	1.951
	20	7	0.030	78	19.596	0.033	57	13.787	0.033	69	21.741
	30	11	0.017	119	69.268	0.035	127	80.240	0.029	133	58.720
15	10	4	0.025	24	1.673	0.015	34	6.817	0.007	33	4.537
	20	7	0.014	80	35.773	0.015	67	35.180	0.016	76	40.132
	30	11	0.012	129	146.703	0.013	136	228.838	0.016	130	162.066

Table 2 Computational results ($g = 10$)

			$b_0 = 300$			$b_0 = 500$			$b_0 = 700$		
p	n	K	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*
5	10	4	0.051	26	0.704	0.046	34	1.248	0.043	33	1.143
	20	7	0.025	79	56.346	0.032	62	44.994	0.047	71	23.673
	30	11	0.045	125	47.880	0.034	140	197.592	0.045	147	60.552
10	10	4	0.010	28	7.026	0.007	34	26.208	0.019	31	3.277
	20	7	0.013	71	18.879	0.019	65	48.435	0.014	72	42.711
	30	11	0.012	144	209.256	0.015	139	181.141	0.012	134	201.443
15	10	4	0.005	30	6.253	0.009	35	15.050	0.005	34	18.370
	20	7	0.045	75	109.595	0.039	58	71.382	0.007	75	197.448
	30	11	0.039	126	675.447	0.008	132	1048.559	0.008	146	1324.301

Table 3 Computational results ($g = 15$)

			$b_0 = 300$			$b_0 = 500$			$b_0 = 700$		
p	n	K	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*	ε	*cols*	*time*
5	10	4	0.029	32	3.376	0.045	32	1.758	0.035	31	1.490
	20	7	0.035	75	20.184	0.034	65	30.992	0.027	79	137.029
	30	11	0.032	124	85.200	0.031	121	128.165	0.040	133	80.973
10	10	4	0.027	33	5.464	0.010	34	7.664	0.026	35	7.843
	20	7	0.037	73	66.685	0.008	59	84.698	0.043	81	94.950
	30	11	0.012	129	542.508	0.010	137	655.576	0.013	140	798.896
15	10	4	0.034	28	13.545	0.041	33	23.513	0.034	31	32.027
	20	7	0.025	82	334.056	0.024	63	203.833	0.029	77	357.506
	30	11	0.018	132	2041.720	0.024	135	2279.999	0.025	138	2429.298

4) C. Archetti, L. Bertazzi, A. Hertz and M. G. Speranza, "A Hybrid Heuristic for an Inventory Routing Problem" INFORMS Journal on Computing Vol.24, pp.101-116, 2012

5) A. M. Campbell and M. W. P. Savelsbergh, "A Decomposition Approach for the Inventory-Routing Problem" Transportation Science Vol.38, pp.488-502, 2004

6) L. C. Coelho J.-F. Cordeau and G. Laporte, "Consistency in Multi-Vehicle Inventory-Routing" Transportation Research Part C, Vol. 24, pp.270-287, 2012

7) Y. Adulyasak, J.-F. Cordeau and R. Jans, "Formulations and Branch-and-Cut Algorithms for Multivehicle Production and Inventory Routing Problems" INFORMS Journal on Computing Vol.26, pp.103-120 2014

8) L. C. Coelho and G. Laporte, "The Exact Solution of Several Classes of Inventory-Routing Problems" Computers & Operations Research Vol.40, pp.558-565 2013

9) G. Clarke and J. W. Jaikumar, "Scheduling of Vehicles from a Centural Depot to a Number of Delivery Points" Operations Research, Vol.12, pp.568-581, 1964

10) M. Desrochers and G. Laporte "Improvements and Extensions to the Miller-Tucker-Zemlin Subtour Elimination Constraints" Operations Research Letters, Vol.10, pp.27-36, 1991

11) Gurobi Optimization, Inc. Gurobi Optimizer Reference Manual Version 6.0, 2014