東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.1,2016,pp.21-23

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その１）
～半群における一般結合律～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.1
~Generalized Associative Law in Semigroup~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 19, 2016 & accepted on Jun. 30, 2016)

あらまし

大学初年次の数学科目において,さまざまな機会に結合律について触れる.そこで結合律から一般結合律が導かれ,そして半群においては,どの2つから先に結合したとしても積は一つの値に確定するので,括弧は省略できることをしっかりと説明したい.

Abstract

Associative Law in semigroup is shown for freshman. Generalized associative law is derived from associative law. Therefore we may abbreviate parentheses in semigroup.

キーワード:半群、一般結合律、括弧
Keywords: Semigroup, Generalized Associative Law, Parentheses

1. はじめに

大学初年次教育の数学において,重要でありながら講義時間の制約などの理由により割愛されている事項が数多く存在している.その一つとして,一般結合律がある.これがどのようなものであり,どのような意味をもっているのかを紹介して行きたい.

集合 S に二項演算 $\circ$ が定義されて, S の任意の 3 つの元 a, b, c について結合律

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

が成り立つとき, S は半群と呼ばれる.結合律が成り立つものには,実数（または,複素数）の加法および乗法,行列の加法および乗法,ベクトルの加法,写像の合成などがある.情報科学の中に登場してくるものとしても,集合演算,命題論理,束,ブール代数など枚挙に遑が無い [1).] しかし,結合律が成り立てば何が言えて,それがどう活用されているのかについての解説をする機会がほとんどない.しかし,小学校に入学以来いつでもと言ってよいほど無意識に活用してきている事柄なのである.

例えば,半群 S の 4 つの元 x, y, z, w について演算 $\circ$ を行うとき,どの 2 つから先に結合させるかによって

$$\begin{aligned}
&((x \circ y) \circ z) \circ w, \\
&(x \circ y) \circ (z \circ w), \\
&x \circ (y \circ (z \circ w)), \\
&x \circ ((y \circ z) \circ w), \\
&(x \circ (y \circ z)) \circ z
\end{aligned}$$

の 5 通りの異なる結果が考えられる.ところが結合律が成り立てば,最終的に得られる元はすべて一致するというものである [2)].

*1 高輪教養教育センター　准教授
Liberal Arts Education Center,Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 一般結合律

半群 S の元の（重複を許した） n 個の項からなる列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n=3, 4, 5, \cdots)$ について

$$a_1 \circ a_2 \circ a_3 = (a_1 \circ a_2) \circ a_3$$

$$a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 = (a_1 \circ a_2 \circ a_3) \circ a_4$$

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_i \circ a_{i+1} = (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_i) \circ a_{i+1} \quad (n=4, 5, \cdots, n-1)$$

と帰納的に定義することにより, $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ が定まる.

今, n 個の項からなる列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ において, まず最初にどこか隣り合った 2 つの項 a_i と a_{i+1} を結合して $n-1$ 個の項からなる列

$$a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i \circ a_{i+1}, a_{i+2,\cdots,} a_n$$

をつくり, 次に, この列のどこか隣り合った 2 つの項を結合して $n-2$ 個の項からなる列をつくる. このような操作を $n-1$ 回続けて行えば, 最後に 1 個の元が得られる.

定理　半群 S においては, 前述の操作を施すことによって最後に得られる元は, 途中で行う結合の順序には全く無関係に確定する. その元は $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ に等しい [3)].

〔証明〕元の個数 n についての数学的帰納法を用いて証明する. まず, $n=1, 2$ の場合は明らかに定理が成り立ち, $n=3$ の場合は結合律に他ならない. 今, $n \geqq 4$ として $n-1$ 個以下の項からなる列については定理が成り立つものと仮定して, n 個の項から成る列 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ についても定理が成り立つことを示す.

まず, 最初に a_i と a_{i+1} とを結合して, $n-1$ 個の項からなる列

$$A_i = (a_1, \cdots, a_i \circ a_{i+1}, \cdots, a_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

をつくると, この A_i からは帰納法の仮定により, 途中で行う結合の順序に関係なく, 最後の元が確定する. よってこの結果を s_i と表すことにする. 特に, $A_1 = (a_1 \circ a_2, a_{3,} \cdots, a_n)$ からは $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = s_1$ を得ることに留意しておく. 今, $n-2$ 個の項からなる列

$$A_{12} = (a_1 \circ a_2 \circ a_3, a_4, \cdots, a_n)$$

$$A_{1i} = (a_1 \circ a_2, \cdots, a_i \circ a_{i+1}, \cdots, a_n) \quad (i=3, 4, \cdots, n-1)$$

を考えることとする. 第 1 回の結合で $A_1 = (a_1 \circ a_2, a_3, \cdots, a_n)$ をつくる場合でも

$$A_k = (a_1, a_2, \cdots, a_k \circ a_{k+1}, \cdots, a_n) \qquad (k=2, 3, \cdots, n-1)$$

をつくる場合でも, 第 2 回の結合で A_{1k} $(k=2, 3, \cdots, n-1)$ をつくることができる. そこで A_{1k} から得られる結果を α と表すことにしておく.

すると，A_1 から得られる結果 s_1 は，A_{1k} から得られる結果 α に一致する．さらに，A_k から得られる結果 s_k もまた A_{1k} から得られる結果 α に一致することがわかる．したがって，$s_k = s_1(=\alpha) \quad (k = 2, 3, \cdots, n-1)$ が成り立つことが示された．〔証明終〕

さらに上記定理の系として次の結果が示されるが，ここでは敢えて数学的帰納法を用いて，直接証明することとしたい．

系　半群 S の元の n 個の項からなる列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ について

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_r) \circ (a_{r+1} \circ a_{r+2} \circ \cdots \circ a_n) = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n \quad (r = 1, 2, \cdots, n-1)$$

が成り立つ[4]．

〔証明〕 n についての数学的帰納法を用いて証明する．今，$n \geqq 4$ としておく．もし $r+1=n$ であるならば，定義に他ならないので $r+1<n$ としておく．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a_1 \circ \cdots \circ a_r) \circ ((a_{r+1} \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n) \\
&= ((a_1 \circ \cdots \circ a_r) \circ (a_{r+1} \circ \cdots \circ a_{n-1})) \circ a_n \\
&= (a_1 \circ \cdots \circ a_r \circ a_{r+1} \circ \cdots a_{n-1}) \circ a_n \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

となることがわかる．〔証明終〕

3. おわりに

肝要なことは，半群 S の重複を許した n 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$ について，前述した $n-1$ 回の操作を施すによって最後に得られる元は，途中で行った結合をどこから行ったかに関係なく，同一のものになることが，結合律を繰り返し用いることにより証明された．言い換えると，式 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ に対してどのような括弧づけを行ったとしても，その式は，前から順に括弧をつけて行った

$$(\cdots((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \cdots \circ a_{n-1}) \circ a_n$$

に等しい．

このことに基づき，括弧を省略して

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$$

と表記することが，許されるということである[5]．

参考文献

1)　小倉久和、高濱徹行「情報の論理数学入門」近代科学社，1991
2)　松村英之「代数学」朝倉書店，1990
3)　浅野啓三、永尾汎「群論」岩波全書，1965
4)　石田信「代数学入門」実教出版，1978
5)　細井勉「情報科学のための代数系入門」産業図書，1982