東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.2,2016,pp.24-29

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 5）
～行列式と解析幾何～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.5
~Determinant and Analytic Geometry~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 22, 2016 & accepted on Dec. 21, 2016)

あらまし

大学初年次で学ぶ線形代数に現れる行列式の各方面への応用が大切なことはいうまでもない．しかし，ここでは敢えてこれまでに学んできた数学を振り返り，その中から行列式を用いることにより簡易に表現できるものや早く正確に求めることができるものを取り上げてみることとする．

Abstract

The basic concepts of determinants in linear algebra are shown for freshmen. In this paper, we give several concrete examples of mathematical expressions by determinants.

キーワード:行列式，解析幾何，消去の原理，終結式
Keywords: *Determinant, Analytic Geometry, Principle of Elimination, Resultant*

1. はじめに

線形代数において行列式の応用として連立方一次程式の解法を学ぶが、次の消去の原理と呼ばれる定理がある．

定理（消去の原理）

次の同次連立一次方程式

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

が非自明解を持つための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots\cdots(**)$$

である．また，$(**)$を$(*)$から$x_1, x_2, \cdots, x_n$を消去して得られる関係式という．

さて，これからすでに学んできた数学をもう一度見直しながら，行列式を使えばもっと扱いが簡単になるものも数多い.そこで特に解析幾何に登場する行列式を用いた表現で上述の消去の原理を用いて得られるものなどを紹介していくこととする[1)2)3)]．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center,Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 直線と平面

まず，平面上の直線の方程式と空間内の平面の方程式を，行列式を用いて表す方法を紹介する．

例 1　平面上の 2 点 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と表される．

例えば，2 点 $(1,\ -3)$，$(-7,\ 4)$を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$-7x - 8y - 17 = 0$$

$$7x + 8y + 17 = 0$$

である．

例 2　空間内の 3 点 $(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$(a_2,\ b_2,\ c_2)$，$(a_3,\ b_3,\ c_3)$ を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と表される．

例えば，3 点 $(-3,\ 4,\ -2)$，$(1, 1,\ -3)$，$(2,\ 0,\ -4)$を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} -7 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 3y - z - 8 = 0$$

である．

さらに，以下の公式も有用である．

公式　空間内の点 $\mathrm{P}\left(a_0,\ b_0,\ c_0\right)$ と直線 $L: \dfrac{x-a_1}{l} = \dfrac{y-b_1}{m} = \dfrac{z-c_1}{n}$ を含む平面 π の方程式は

$$\begin{vmatrix} x-a_0 & y-b_0 & z-c_0 \\ a_1-a_0 & b_1-b_0 & c_1-c_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

で与えられる．

（証明）まず，平面 π の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ とすると，点 P を通るからその方程式は

$$A(x-a_0) + B(y-b_0) + C(z-c_0) = 0 \cdots\cdots ①$$

と表される．

さて，直線 L は点 $\mathrm{Q}\left(a_1,\ b_1,\ c_1\right)$ を通り，方向ベクトルが $\mathbf{v} = (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$ である．すると，平面 π は点 Q を通るから

$$A(a_1-a_0) + B(b_1-b_0) + C(c_1-c_0) = 0 \cdots\cdots ②$$

であり，さらに $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ なので

$$Al + Bm + Cn = 0 \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

ところが $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ だから，①, ②, ③から消去の原理により $A,\ B,\ C$ を消去して

$$\begin{vmatrix} x-a_0 & y-b_0 & z-c_0 \\ a_1-a_0 & b_1-b_0 & c_1-c_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

が得られる．

3. 外積

空間内の 2 つのベクトル

$$\mathbf{a}=(a_1,\, a_2,\, a_3)=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},\quad \mathbf{b}=(b_1,\, b_2,\, b_3)=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$$

に対して，次の(1), (2)を満たすベクトル $\mathbf{v}$ を $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ の外積（またはベクトル積）といい，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ で表す．

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ の両方に垂直で，$\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の順で右手系をなす．

(2) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の大きさは $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい，すなわち，$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$（ただし，$\theta$ は $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ のなす角）．

一方，このとき $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ を行列式を用いることにより，成分を用いて表示すると

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

となることが知られている．

右辺は次の形式的な行列式の第 1 行についての展開と考えることができる．

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

例題　3 点 $\mathbf{O}(0,\, 0,\, 0),\ \ \mathbf{A}(-2,\, 2,\, -1),\ \ \mathbf{B}(-5,\, 3,\, 0)$ を頂点とする三角形の面積を S を求めよ．

【解答】　よく知られている解法として

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9\times 34-16^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{306-256} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{50} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

と求めることができる．

【別解】　ところが外積の性質を用いて求めてみると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -5 & 0\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -5 & 3\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

であるから

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9+25+16}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{50}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

として求めることができる.

4. おわりに

さらに消去の原理を用いて得られる重要な概念に終結式があるので紹介しておく [3].

例　3 次方程式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0\quad(a\neq 0)$ と 2 次方程式 $g(x)=px^2+qx+r=0\quad(p\neq 0)$ が共通解を持つための必要十分条件は

$$R(f,\,g)=\begin{vmatrix}a & b & c & d & 0\\ 0 & a & b & c & d\\ p & q & r & 0 & 0\\ 0 & p & q & r & 0\\ 0 & 0 & p & q & r\end{vmatrix}$$

である.

上記の $R(f,\,g)$ のことを $f(x)$ と $g(x)$ の終結式という. 一般の m 次式 $f(x)$ と n 次式 $g(x)$ に対しても同様に終結式 $R(f,\,g)$ が定義され。次の定理が成り立つ.

定理　m 次方程式 $f(x)=0$ と n 次方程式 $g(x)=0$ が共通解を持つための必要十分条件は $R(f,\,g)=0$ である.

参考文献

1) 安達忠次「線形代数と解析幾何」森北出版，1974
2) 富永晃「基礎演習線形代数」聖文社，1975
3) 佐藤正次，永井治共編「基礎課程線型代数学」学術図書，1976