東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.1,2018,pp.38-44

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 20）
～ヘヴィサイドの展開定理～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.20
~ Heaviside Expansion Theorem ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 30, 2018 & accepted on Jul.27, 2018)

あらまし

逆ラプラス変換の計算方法として，留数定理を利用するものや部分分数分解によるものなどが知られる．この論文では，ヘヴィサイドの展開定理を用いた逆ラプラス変換の計算方法について解説する．

Abstract

As a method for calculating inverse Laplace transforms, we sometimes use means of residues, or partial fraction decompositions. In this paper, we give an explanation of calculus for inverse Laplace transforms by means of the Heaviside expansion theorem.

キーワード：逆ラプラス変換，分数式関数，ヘヴィサイドの展開定理

Keywords: *Inverse Laplace Transform , Fractional Function , Heaviside Expansion Theorem*

1. はじめに

大学初年次にラプラス変換とその逆変換（逆ラプラス変換）を学ぶのであるが，逆ラプラス変換の計算方法については，留数定理を用いるものなどもあるが，像関数が分数式関数になることが多い．また，分数式関数

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \big(P(s)\text{の次数} < Q(s)\text{の次数}\big)$$

は，一般に逆ラプラス変換をもつことが示されることから，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ を実際に計算によって求めるためには，部分分数分解やヘヴィサイドの展開定理が有用である．

本論文では，ヘヴィサイドの展開定理が,実用上では主に次のような場合

［1］ $Q(s)=(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)$ であり，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ はすべて異なる数である場合

［2］ $Q(s)=(s-a)^n$ の場合

［3］ $P(s)=As+B,\ Q(s)=(s-a)^2+b^2\ \ \big(a, b, A, B\text{は実数}\big)$ の場合

に利用され，それぞれの場合の逆ラプラス変換がどのような形の展開式になるかを示す．そして，実際の計算例について紹介する[1)2)3)4)]．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

2. ヘヴィサイドの展開定理

$P(s),\ Q(s)$ が互いに素なsの多項式であり，$P(s)$の次数は$Q(s)$の次数より低いとする．このとき

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

の逆ラプラス変換の計算方法の一つとして，ヘヴィサイドの展開と呼ばれるものがある．このヘヴィサイドの展開定理を厳密に述べることは割愛するが，実用上は主に,以下のようにして使われることを紹介する．

［1］ $Q(s)=(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)$ であり，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ はすべて異なる数であるとき

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}e^{a_1t}+\frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}e^{a_2t}+\cdots\cdots+\frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}e^{a_nt}$$

である．

（証明）

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{c_1}{s-a_1}+\frac{c_2}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{s-a_n}\quad \left(c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n\text{は定数}\right)$$

と部分分数分解できる．両辺に$s-a_k\quad (k=1,2,\cdots\cdots,n)$ をかける．

$$\frac{(s-a_k)P(s)}{Q(s)}=c_1\frac{s-a_k}{s-a_1}+c_2\frac{s-a_k}{s-a_2}+\cdots\cdots+c_n\frac{s-a_k}{s-a_n}$$

となるから

$$\lim_{s\to a_k}\frac{(s-a_k)P(s)}{Q(s)}=\lim_{s\to a_k}\left(c_1\frac{s-a_k}{s-a_1}+c_2\frac{s-a_k}{s-a_2}+\cdots+\ c_k+\cdots+c_n\frac{s-a_k}{s-a_n}\right)$$

$$\lim_{s\to a_k}\frac{(s-a_k)P(s)}{Q(s)}=c_k$$

であるが，左辺は$\frac{0}{0}$型の不定形なので，ロピタルの定理を使うと

$$\text{左辺}=\lim_{s\to a_k}P(s)\cdot\lim_{s\to a_k}\frac{s-a_k}{Q(s)}=\lim_{s\to a_k}P(s)\cdot\lim_{s\to a_k}\frac{(s-a_k)'}{Q'(s)}=\lim_{s\to a_k}P(s)\cdot\lim_{s\to a_k}\frac{1}{Q'(s)}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

が得られるので

$$c_k=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

である．したがって

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}\frac{1}{s-a_1}+\frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}\frac{1}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}\frac{1}{s-a_n}$$

なので

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}e^{a_1 t}+\frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}e^{a_2 t}+\cdots\cdots+\frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}e^{a_n t}$$

であることがわかる.

（証明終）

例 2.1

$$F(s)=\frac{3s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s-3)}$$

の逆ラプラス変換を求める.

（解答）

まず分子の $P(s)=3s^2+2s+1$ について

$$P(1)=6\,,P(-2)=9\,,P(3)=34$$

であり，分母の $Q(s)=(s-1)(s+2)(s-3)$ について

$$Q'(s)=(s+2)(s-3)+(s-1)(s-3)+(s-1)(s+2)$$

$$Q'(1)=-6, Q'(-2)=15, Q'(3)=10$$

であることがわかる.

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{6}{-6}e^{t}+\frac{9}{15}e^{-2t}+\frac{34}{10}e^{3t}=-e^{t}+\frac{3}{5}e^{-2t}+\frac{17}{5}e^{3t}$$

が得られる.

（解答終）

［2］ $Q(s)=(s-a)^n$ のとき

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=e^{at}\ \left\{\frac{P(a)}{0!\cdot(n-1)!}t^{n-1}+\frac{P'(a)}{1!\cdot(n-2)!}t^{n-2}+\frac{P''(a)}{2!\cdot(n-3)!}t^{n-3}\right.$$
$$+\frac{P^{(3)}(a)}{3!\cdot(n-4)!}t^{n-4}+\cdots\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!\cdot(n-k-1)!}t^{n-k-1}$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{P^{(n-2)}(a)}{(n-2)!\cdot 1!}t+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\cdot 0!}\right\}$$

である.

（証明）

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_n}{(s-a)^n}+\frac{b_{n-1}}{(s-a)^{n-1}}+\frac{b_{n-2}}{(s-a)^{n-2}}+\frac{b_{n-3}}{(s-a)^{n-3}}+\cdots\cdots+\frac{b_2}{(s-a)^2}+\frac{b_1}{s-a}$$

と部分分数分解ができる.

両辺に $(s-a)^n$ をかけると

$$P(s)=b_n+b_{n-1}(s-a)+b_{n-2}(s-a)^2+b_{n-3}(s-a)^3+\cdots\cdots+b_2(s-a)^{n-2}+b_1(s-a)^{n-1}$$

となる．まず$s=a$とすると，$P(a)=b_n$ が得られる．

次に

$$P'(s)=b_{n-1}+2b_{n-2}(s-a)+3b_{n-3}(s-a)^2+\cdots\cdots+(n-2)b_2(s-a)^{n-3}+(n-1)b_1(s-a)^{n-2}$$

なので，$s=a$ とすると，$P'(a)=b_{n-1}$ が得られる．

さらに

$$P''(s)=2!\cdot b_{n-2}+3!\cdot b_{n-3}(s-a)+\cdots\cdots+(n-2)(n-3)b_2(s-a)^{n-4}+(n-1)(n-2)b_1(s-a)^{n-3}$$

なので，$s=a$ とすると，$P''(a)=2!\cdot b_{n-2}$ すなわち

$$b_{n-2}=\frac{P''(a)}{2!}$$

が得られる．これを繰り返すと

$$P^{(k)}(s)=k!\cdot b_{n-k}+(k+1)k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot b_{n-k-1}(s-a)+(k+2)(k+1)k\cdots 4\cdot 3\cdot b_{n-k-2}(s-a)^2$$
$$+\cdots\cdots+(n-2)(n-3)\cdots(n-k-1)\cdot b_2(s-a)^{n-k-2}+(n-1)(n-2)\cdots(n-k)b_1(s$$

なので，$s=a$ とすると，$P^{(k)}(a)=k!\cdot b_{n-k}$ すなわち

$$b_{n-k}=\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\qquad(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

が得られる．

よって

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(a)}{0!}\frac{1}{(s-a)^n}+\frac{P'(a)}{1!}\frac{1}{(s-a)^{n-1}}+\frac{P''(a)}{2!}\frac{1}{(s-a)^{n-2}}+\frac{P^{(3)}(a)}{3!}\frac{1}{(s-a)^{n-3}}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(s-a)^{n-k}}+\cdots\cdots+\frac{P^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}\frac{1}{(s-a)^2}+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\frac{1}{s-a}$$

となっていることがわかるが

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^m}\right]=\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{at}\quad(m=1,2,3,\cdots\cdots)$$

を利用すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(a)}{0!}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}+\frac{P'(a)}{1!}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{at}+\frac{P''(a)}{2!}\frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{at}$$
$$+\frac{P^{(3)}(a)}{3!}\frac{1}{(n-4)!}t^{n-4}e^{at}+\cdots\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(n-k-1)!}t^{n-k-1}e^{at}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{P^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}\frac{1}{1!}te^{at}+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\cdot 0!}e^{at}$$
$$=e^{at}\ \left\{\frac{P(a)}{0!\cdot(n-1)!}t^{n-1}+\frac{P'(a)}{1!\cdot(n-2)!}t^{n-2}+\frac{P''(a)}{2!\cdot(n-3)!}t^{n-3}\right.$$

$$+\frac{P^{(3)}(a)}{3!\cdot\ (n-4)!}t^{n-4}+\cdots\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!\cdot(n-k-1)!}t^{n-k-1}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{P^{(n-2)}(a)}{(n-2)!\cdot\ 1!}t+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\cdot 0!}\ \}$$

であることがわかる.

（証明終）

例 2.2

$$F(s)=\frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3}$$

の逆ラプラス変換を求める.

（解答）

まず，分子の$P(s)=2s^2+4s+1$について

$$P'(s)=4s+4,\quad P''(s)=4$$

なので

$$P(2)=17,\quad P'(2)=12,\quad P''(2)=4$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}\left\{\frac{P(2)}{0!\cdot 2!}t^2+\frac{P'(2)}{1!\cdot 1!}t+\frac{P''(2)}{2!\cdot 0!}\right\}=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+\frac{12}{1}t+\frac{4}{2}\right)=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+12t+2\right)$$

が得られる.

（解答終）

[3]　$P(s)=As+B,\ Q(s)=(s-a)^2+b^2$ $(a,b\,,A,B$は実数$)$のとき，$P(a+bi)$ $(i$は虚数単位$)$の実部をA_1，虚部をA_2とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{1}{b}e^{at}(A_1\sin bt+A_2\cos bt)$$

である.

（証明）

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{As+B}{(s-a)^2+b^2}=A\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}+\frac{Aa+B}{b}\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

なので

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right]=e^{at}\cos bt,\ \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=e^{at}\sin bt$$

を使うと

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=Ae^{at}\cos bt+\frac{Aa+B}{b}e^{at}\sin bt$$

が得られる.

一方，$P(a+bi)=A(a+bi)+B=(Aa+B)+Abi$ であるから

$$A_1=Aa+B, \qquad A_2=Ab$$

によって書き換えを行うと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]&=e^{at}\left(A\cos bt+\frac{Aa+B}{b}\sin bt\right)\\&=e^{at}\left(\frac{Ab}{b}\cos bt+\frac{Aa+b}{b}\sin bt\right)\\&=e^{at}\left(\frac{A_2}{b}\cos bt+\frac{A_1}{b}\sin bt\right)\\&=\frac{1}{b}e^{at}(A_1\sin bt+A_2\cos bt)\end{aligned}$$

であることがわかる.

（証明終）

例 2.3

$$F(s)=\frac{2s+3}{(s-3)^2+4}$$

の逆ラプラス変換を求める.

（解答）

まず，分子の$P(s)=2s+1$について

$$P(3+2i)=2(3+2i)+3=9+4i$$

であるから

$$A_1=9, \qquad A_2=4$$

とおくと

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}e^{3t}(9\sin 2t+4\cos 2t)$$

が得られる.

（解答終）

3. おわりに

第 2 章の例 1, 例 2, 例 3 に関して, ヘヴィサイドの展開定理を用いた解法を紹介したが, 部分分数分解を使うのであれば, 以下のように

例 2.1 においては

$$F(s)=\frac{3s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s-3)}=-\frac{1}{s-1}+\frac{3}{5}\frac{1}{s+2}+\frac{17}{5}\frac{1}{s-3}$$

例 2.2 においては

$$F(s)=\frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3}=2\frac{1}{s-2}+12\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{17}{2}\frac{2}{(s-2)^3}$$

例 2.3 においては

$$F(s)=\frac{2s+3}{(s-3)^2+4}=2\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}+\frac{9}{2}\frac{2}{(s-3)^2+2^2}$$

と式変形をすればよい.

参考文献

1） 福田安蔵，鈴木七緒，安岡善則，黒崎千代子 共編「詳解　応用解析演習」共立出版，1970
2） 樋口禎一，八高隆雄「フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本」牧野書店，2000
3） 大月卓郎，大芝猛，市川朗，竹内康博 共著「応用数学」学術図書，1987
4） 楠田信，平居孝之，福田亮治 著「使える数学フーリエ・ラプラス変換」共立出版，1997