東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.41-50

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 13）
～ジョルダン標準形を用いた線形微分方程式の解法～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.13
~ Solutions of Linear Differential Equations by Jordan Standard Form ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 28, 2017 & accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

線形代数に含まれる重要な事項として，固有値と固有ベクトルの概念そして行列の対角化およびジョルダン標準形が挙げられる．定数係数同次線形微分方程式についてその解空間，およびジョルダン標準形を用いた解法について紹介する．

Abstract

As important items in linear algebra, we teach the concepts of eigen values and eigen vectors, diagonalization, and Jordan standard forms. In this paper, we explain the solution spaces and methods of solution by Jordan standard forms of constant homogeneous linear differential equations.

キーワード: ジョルダン標準形, 線形微分方程式, コンパニオン行列
Keywords: *Jordan Standard Form, Linear Differential Equation, Companion Matrix*

1. はじめに

大学初年次において線形代数と微分積分を学ぶが，この論文では線形微分方程式をジョルダン標準形を用いて解く方法について紹介する[1)2)3)]．まず準備として，重要な概念であるコンパニオン行列について述べる．

定義

次の n 次行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

のことを，多項式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ のコンパニオン行列という（ただし，$x+a_0$ のコンパニオン行列は，1 次行列 $(-a_0)$ であると約束する）．

定理

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor

コンパニオン行列 A について，$A-xE$ の単因子は

$$e_1(x)=1,\ e_2(x)=1,\ \cdots,e_{n-1}(x)=1,\ e_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

である．

（証明）

$A-xE$ について，以下の行および列基本変形

（ア）　第 2 行の x 倍，第 3 行の x^2 倍，・・・，第 $n-1$ 行の x^{n-2} 倍，第 n 行の x^{n-1} 倍を，第 1 行に加える．

（イ）　第 1 列の x 倍を第 2 列に，第 1 列の a_1 倍を第 n 列に加える．

（ウ）　第 2 列の x 倍を第 3 列に，第 2 列の a_2 倍を第 n 列に加える．

（エ）　第 $n-2$ 列の x 倍を第 $n-1$ 列に，第 $n-2$ 列の a_{n-2} 倍を第 n 列に加える．

（オ）　第 $n-1$ 列の $x+a_{n-1}$ 倍を第 n 列に加える．

（カ）　第 1 行を -1 倍する．

（キ）　第 1 行と第 2 行を入れ替え，第 2 行と第 3 行を入れ替え，・・・，第 $n-1$ 行と第 n 行を入れ替える．

を行う．

すると

$$A-xE=\begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(ア)}\begin{pmatrix} -x+x & -x^2+x^2 & \cdots & \cdots & -x^{n-1}+x^{n-1} & -a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-2}x^{n-2}-a_{n-1}x^{n-1}-x^{n-1} \\ 1 & -x & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e_n(x) \\ 1 & -x & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$
\xrightarrow{(\text{イ})}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e_n(x) \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -x & \cdots & 0 & -a_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1}
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(\text{ウ})}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e_n(x) \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\xrightarrow{(\text{エ})}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e_n(x) \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1}
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(\text{オ})}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e_n(x) \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(\text{カ})}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & e_n(x) \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(\text{キ})}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & e_n(x)
\end{pmatrix}
$$

となる.

【証明終】

系

コンパニオン行列 A の固有多項式は

$$
\left| A - xE \right| = (-1)^n \left(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = (-1)^n f(x)
$$

である.

（証明）

前述の定理の証明で行った，行および列基本変形から明らかである.

【証明終】

2. 同次線形微分方程式の解空間

例

定数係数 3 階同次線形微分方程式

$$
y''' + a y'' + b y' + c y = 0 \qquad (a, b, c \text{ は, 定数})
$$

の解全体がつくる集合 V は，3 次元の線形空間であり，その基底の 1 つに，次の初期条件

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0,\ y_1''(0)=0\ ;$$
$$y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1,\ y_2''(0)=0\ ;$$
$$y_3(0)=0,\ y_3'(0)=0,\ y_3''(0)=1$$

を満たす関数の組 $\{y_1,\ y_2,\ y_3\}$ がある．

（証明）

$y_1(x),\ y_2(x)\in V$ すなわち $y_1(x),\ y_2(x)$ が解だとすると

$$y_1'''(x)+a\,y_1''(x)+b\,y_1'(x)+c\,y_1(x)=0,\quad y_2'''(x)+a\,y_2''(x)+b\,y_2'(x)+c\,y_2(x)=0$$

なので

$$\{y_1(x)+y_2(x)\}'''+a\{y_1(x)+y_2(x)\}''+b\{y_1(x)+y_2(x)\}'+c\{y_1(x)+y_2(x)\}=0$$

であるから，$y_1(x)+y_2(x)$ も解，すなわち $y_1(x)+y_2(x)\in V$ である．また k を定数とするとき

$$\{k\,y_1(x)\}'''+a\{k\,y_1(x)\}''+b\{k\,y_1(x)\}'+c\{k\,y_1(x)\}=0$$

であるから，$k\,y_1(x)$ も解，すなわち $k\,y_1(x)\in V$ である．よって，V は線形空間である．

さてこの微分方程式の解 $y(x)$ は，初期条件

$$y(0)=a_1\,,\ y'(0)=a_2\,,\ y''(0)=a_3$$

を与えると，一通りに定まる．

そこで $(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$ が，それぞれ $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ であるような解を，それぞれ $y_1\,,\,y_2\,,\,y_3$ とする．

さて

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_3y_3(x)=0\ \cdots ①\qquad (c_1\,,\,c_2\,,\,c_3\ \text{は，定数})$$

とおいて，両辺を 2 回微分すると

$$c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+c_3y_3'(x)=0\ \cdots ②$$
$$c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+c_3y_3''(x)=0\ \cdots ③$$

となる．

① において $x=0$ とすると

$$c_1y_1(0)+c_2y_2(0)+c_3y_3(0)=0$$

となるが，$y_1(0)=1,\ y_2(0)=0,\ y_3(0)=0$ より $c_1=0$ が得られる．

② において $x=0$ とすると

$$c_1y_1'(0)+c_2y_2'(0)+c_3y_3'(0)=0$$

となるが，$y_1'(0)=0,\ y_2'(0)=1,\ y_3'(0)=0$ より $c_2=0$ が得られる．

③ において $x=0$ とすると

$$c_1 y_1''(0) + c_2 y_2''(0) + c_3 y_3''(0) = 0$$

となるが，$y_1''(0) = 0,\ y_2''(0) = 0,\ y_3''(0) = 1$ より $c_3 = 0$ が得られる．

したがって，$\{y_1, y_2, y_3\}$ は，一次独立である．

次に，V の任意の元を $y(x)$ として

$$y(0) = a_1,\ y'(0) = a_2,\ y''(0) = a_3$$

であるとすると

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) \cdots ④$$

と表すことができる．なぜならば，④の両辺を 2 回微分すると

$$y'(x) = a_1 y_1'(x) + a_2 y_2'(x) + a_3 y_3'(x) \cdots ⑤$$
$$y''(x) = a_1 y_1''(x) + a_2 y_2''(x) + a_3 y_3''(x) \cdots ⑥$$

なので，④，⑤，⑥において $x = 0$ とすると $y(0) = a_1,\ y'(0) = a_2,\ y''(0) = a_3$ が得られるからである．

よって，$y(x)$ は，$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$ の一次結合として表される．

以上より，$\{y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)\}$ は，V の基底で $\dim V = 3$ である．

【証明終】

3. ジョルダン標準形を用いた線形微分方程式の解法

例題

定数係数 3 階同次線形微分方程式

$$y''' - 8y'' + 21y' - 18y = 0$$

を解け．

（解答）

第 2 章の例で示したように定数係数 3 階同次線形微分方程式

$$y''' - 8y'' + 21y' - 18y = 0$$

の解全体がつくる集合 V は 3 次元の線形空間であり，その基底の 1 つは次の初期条件

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_1''(0) = 0\ ;$$
$$y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1,\ y_2''(0) = 0\ ;$$
$$y_3(0) = 0,\ y_3'(0) = 0,\ y_3''(0) = 1$$

を満たす関数の組 $\{y_1, y_2, y_3\}$ である．

y に y' を対応させる線形変換 $D{:}V \to V$ の，この基底に関する表現行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(Dy_1,\ Dy_2,\ Dy_3\right)=\left(y_1,\ y_2,\ y_3\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases} Dy_1 = y_1'(t)=a_{11}y_1(t)+a_{21}y_2(t)+a_{31}y_3(t) \\ Dy_2 = y_2'(t)=a_{12}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+a_{32}y_3(t)\cdots\cdots(*) \\ Dy_3 = y_3'(t)=a_{13}y_1(t)+a_{23}y_2(t)+a_{33}y_3(t) \end{cases}$$

となる． $(*)$において $t=0$ とすると

$$\begin{cases} y_1'(0)=a_{11}y_1(0)+a_{21}y_2(0)+a_{31}y_3(0) \\ y_2'(0)=a_{12}y_1(0)+a_{22}y_2(0)+a_{32}y_3(0) \\ y_3'(0)=a_{13}y_1(0)+a_{23}y_2(0)+a_{33}y_3(0) \end{cases}$$

より， $a_{11}=0,\ a_{12}=1,\ a_{13}=0$が得られる．

$(*)$を微分した式において $t=0$ とすると

$$\begin{cases} y_1''(0)=a_{11}y_1'(0)+a_{21}y_2'(0)+a_{31}y_3'(0) \\ y_2''(0)=a_{12}y_1'(0)+a_{22}y_2'(0)+a_{32}y_3'(0) \\ y_3''(0)=a_{13}y_1'(0)+a_{23}y_2'(0)+a_{33}y_3'(0) \end{cases}$$

より， $a_{21}=0,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1$が得られる．

$(*)$を 2 回微分した式において $t=0$ とすると

$$\begin{cases} y_1'''(0)=a_{11}y_1''(0)+a_{21}y_2''(0)+a_{31}y_3''(0) \\ y_2'''(0)=a_{12}y_1''(0)+a_{22}y_2''(0)+a_{32}y_3''(0) \\ y_3'''(0)=a_{13}y_1''(0)+a_{23}y_2''(0)+a_{33}y_3''(0) \end{cases}$$

より， $a_{31}=y_1'''(0),\ a_{32}=y_2'''(0),\ a_{33}=y_3'''(0)$が得られる．

一方， y_1, y_2, y_3 は，微分方程式 $y'''-8y''+21y'-18y=0$の解であるから

$$y_1'''(0)-8y_1''(0)+21y_1'(0)-18y_1(0)=0\ ,$$
$$y_2'''(0)-8y_2''(0)+21y_2'(0)-18y_2(0)=0$$
$$y_3'''(0)-8y_3''(0)+21y_3'(0)-18y_3(0)=0$$

より， $a_{31}=y_1'''(0)=18,\ a_{32}=y_2'''(0)=-21,\ a_{33}=y_3'''(0)=8$が得られる．したがって

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 18 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

であることがわかる．すると $A-xE$ の単因子は，第 1 章で述べたように

$$e_1(x)=1,\ e_2(x)=1,\ e_3(x)=x^3-8x^2+21x-18=(x-3)^2(x-2)$$

であるから，Aのジョルダン標準形の一つとして

$$J=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

をとることができる．

線形変換 $D:V\to V$ の表現行列が J であるような V の基底を $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}$ とすると

$$(Dz_1,\ Dz_2,\ Dz_3)=(z_1,\ z_2,\ z_3)\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{cases}z_1'=3z_1\cdots\cdots①\\z_2'=z_1+3z_2\cdots\cdots②\\z_3'=2z_3\cdots\cdots③\end{cases}$$

を解くこととする．

すると，①を解いて $z_1(t)=C_1e^{3t}$ $(C_1$ は任意定数$)$，そして③を解いて $z_3(t)=C_2e^{2t}$ $(C_2$ は任意定数$)$となることがわかる．さらに，②は $z_2'(t)=C_1e^{3t}+3z_2(t)$ すなわち $z_2'(t)-3z_1(t)=C_1e^{3t}$ となるので，これを解いて

$$\begin{aligned}z_2(t)&=e^{-\int(-3)dt}\left\{\int e^{\int(-3)dt}\times\left(C_1e^{3t}\right)dt+C_3\right\}\ (C_3\text{ は任意定数})\\&=e^{3t}\left\{\int e^{-3t}\times\left(C_1e^{3t}\right)dt+C_3\right\}\\&=e^{3t}(C_1t+C_3)\end{aligned}$$

が得られる．線形空間 V の任意の元，すなわち微分方程式の一般解は $z_1,\ z_2,\ z_3$ の 1 次結合として表されるので

$$\begin{aligned}y(t)&=\alpha z_1(t)+\beta z_2(t)+\gamma z_3(t)\\&=\alpha C_1e^{3t}+\beta(C_1t+C_3)e^{3t}+\gamma C_2e^{2t}\\&=(\beta C_1t+\alpha C_1+\beta C_3)e^{3t}+\gamma C_2e^{2t}\end{aligned}$$

であるが，改めて $A=\beta C_1,\ B=\alpha C_1+\beta C_3,\ C=\gamma C_2$ とおくと

$$y(t)=(At+B)e^{3t}+Ce^{2t}$$

となる．

【解答終】

【別解】

まず

$$x_1(t)=y(t),\ x_2(t)=y'(t),\ x_3(t)=y''(t)$$

とおくと

$$x_1'(t)=y'(t),\ x_2'(t)=y''(t),\ x_3'(t)=y^{(3)}(t)$$

となる．すると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y^{(3)}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ 8y''(t)-21y'(t)+18y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ 18x_1(t)-21x_2(t)+8x_3(t) \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 18 & -21 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}\cdots\cdots(*)$$

が得られる．今

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 18 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A-xE$ の単因子は，第 1 章で述べたように

$$e_1(x)=1,\ e_2(x)=1,\ e_3(x)=x^3-8x^2+21x-18=(x-3)^2(x-2)$$

であるから，A のジョルダン標準形 J は，例えば変換行列を P とすると

$$J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdots\cdots(**)$$

の形である．よって，$P=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)$ とおけば

$$AP=A(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)=(A\mathbf{p}_1,A\mathbf{p}_2,A\mathbf{p}_3)$$

であり

$$P\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=(3\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1+3\mathbf{p}_2,2\mathbf{p}_3)$$

となるが，$AP=P\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = 3\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (A-3E)\mathbf{p}_1 = 0 \cdots\cdots ① \\ (A-3E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \cdots\cdots ② \\ (A-2E)\mathbf{p}_3 = 0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

となる．これについて，例えば $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ は①を満たし，$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ は③を満たすが，さらにこの $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$ は②を満たす．したがって変換行列 P の一つに

$$P = (\mathbf{p}_1\,,\,\mathbf{p}_2\,,\,\mathbf{p}_3\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

がある．

さて $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$ とおけば $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{pmatrix}$ なので，$(*)$ より $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ だから

$$P\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

なので，$(**)$ より

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} v_1'(t) = 3v_1(t) + v_2(t) \cdots\cdots ④ \\ v_2'(t) = 3v_2(t) \cdots\cdots ⑤ \\ v_3'(t) = 2v_3(t) \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

が得られる．

すると，⑤を解いて $v_2(t) = C_1e^{3t}$ $(C_1$ は任意定数$)$，そして⑥を解いて $v_3(t) = C_2e^{2t}$ $(C_2$ は任意定数$)$ となることがわかる．

よって，④は $v'_1(t) = 3v_1(t) + C_1e^{3t}$ すなわち $v'_1(t) - 3v_1(t) = C_1e^{3t}$ となるので，これを解いて

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= e^{-\int(-3)dt}\left\{\int e^{\int(-3)dt}\times\left(C_1e^{3t}\right)dt + C_3\right\}\ \left(C_3\text{は任意定数}\right) \\
&= e^{3t}\left\{\int e^{-3t}\times\left(C_1e^{3t}\right)dt + C_3\right\} \\
&= e^{3t}\left(C_1t + C_3\right)
\end{aligned}$$

が得られる．

したがって

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 15 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(C_1t + C_3\right)e^{3t} \\ C_1e^{3t} \\ C_2e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(C_1t + C_1 + C_3\right)e^{3t} + C_2e^{2t} \\ \left(3C_1t + 4C_1 + 3C_3\right)e^{3t} + 2C_2e^{2t} \\ \left(9C_1t + 15C_1 + 9C_3\right)e^{3t} + 4C_2e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

なので

$$y(t) = x_1(t) = \left(C_1t + C_1 + C_3\right)e^{3t} + C_2e^{2t}$$

であるが，改めて $A = C_1$，$B = C_1 + C_3$，$C = C_2$ とおくと

$$y(t) = (At + B)e^{3t} + Ce^{2t}$$

となる．

【解答終】

参考文献

1） 韓太舜，伊理正夫共著「ジョルダン標準形」東京大学出版会，1982
2） 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975
3） 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982