東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.49-60

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 21）
～部分分数分解～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 21
~ Partial Fraction Decomposition ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

解析学において，計算に重宝する方法の一つとして部分分数分解がある. この論文では有理関数が部分分数に分解されることを，代数学の基本定理に基づいて詳細に証明することを目標とする.

Abstract

As a useful method of calculations in analysis, we give partial fraction decompositions. The purpose of this paper is to present a full proof based on the fundamental theorem of algebra.

キーワード：代数学の基本定理，分数式，部分分数分解

Keywords: *Fundamental Theorem of Algebra, Fractional Expression, Partial Fraction Decomposition*

1. はじめに

有理関数の不定積分や逆ラプラス変換の計算などに，部分分数分解と呼ばれるものが用いられる.

例えば

$$\frac{3x^3+13x^2+16x-1}{(x+3)^2(x^2+4)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x-1}{x^2+4}$$

と部分分数分解されることを利用すれば

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^3+13x^2+16x-1}{(x+3)^2(x^2+4)}\,dx&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x-1}{x^2+4}\right\}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+4}\right\}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+2^2}\right\}dx\\&=\log|x+3|+\frac{1}{x-3}+\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

と，不定積分が求められる.

また，同様にして

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^3+13s^2+16s-1}{(s+3)^2(s^2+4)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}-\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{2s-1}{s^2+4}\right]$$

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-(-3)} - \frac{1}{\{\mathrm{s}-(-3)\}^2} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{-1}{s^2+4}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-(-3)} - \frac{1}{\{\mathrm{s}-(-3)\}^2} + 2\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+2^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\mathrm{s}^2+2^2}\right]$$

ここで，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = te^{at}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$$

（ただし，a, ω は定数とする．）

であることを利用すると

$$= e^{-3t} - te^{-3t} + 2\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$$

と，逆ラプラス変換の計算もできる．

部分分数分解とは

定理

有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (\deg f < \deg g)$$

において

$$g(x) = (x-a)^k \cdots (x-c)^l \, (x^2+vx+w)^s \cdots (x^2+px+q)^u$$

$$(a, \cdots, c, v, w, \cdots, p, q \in \mathbb{R};\ v^2-4w<0, \cdots, p^2-4q<0)$$

となっているならば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots\cdots + \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(x-c)^l}$$

$$+ \frac{V_1x+W_1}{x^2+vx+w} + \cdots + \frac{V_sx+W_s}{(x^2+ux+w)^s} + \cdots\cdots + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{P_ux+Q_u}{(x^2+px+q)^u}$$

$$(A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots, C_1, C_2, \cdots C_l, V_1, W_1, \cdots V_s, W_s, \cdots, P_1, Q_1, \cdots P_u, Q_u \in \mathbb{R})$$

と表される．

というものである．このように重宝される概念であるが，主張の正確な記述及びその証明については割愛される場合が多いように思われる．この論文では，代数学の基本定理の複素関数論を用いた証明から始めて，上記定理の詳細な証明について述べることを目的とする[1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11][12]．

2. 代数学の基本定理

この章では，代数学の基本定理の複素関数論を用いた証明についての紹介を行う[2][3][4][5]．複素平面全体にお

いて正則な関数のことを，整関数という．また，領域D内のすべての点zにおいて$|f(z)| \leqq M$（Mはある正の定数）のとき，関数$f(z)$はDで有界であるという．以下において，iは虚数単位とする．

これに関しては，次の結果がよく知られている．

定理 2.1（Liouville の定理）

有界な整関数は,定数に限る．

さらに，つぎのことも肝要である．

定理 2.2(最大値・最小値の定理)

$f(x,y)$は，有界閉集合Dで連続な実数値関数とする．このとき$f(x,y)$が最大値をとる点と最小値をとる点が必ずD内に存在する．

ここで，$f(z)=u(x,y)+v(x,y)i \quad (z=x+yi,\ x,y \in \mathbb{R})$が有界閉集合$D$で連続であるための必要十分条件は,$u(x,y),\ v(x,y)$ が共に有界閉集合Dで連続であることであるから，定理 2.2 より,$u(x,y),\ v(x,y)$ はDで最大値と最小値をとることがわかる．

したがって，$f(z)$ が有界閉集合Dで連続であるならば

$$|f(z)| = \sqrt{\{u(x,y)\}^2 + \{v(x,y)\}^2}$$

も Dにおいて最大値と最小値をとることに留意しておく．

定理 2.3（代数学の基本定理，Gauss の定理）

複素数係数のn次代数方程式

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + c_1 z + c_0 = 0 \quad \left(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0, n \geqq 1\right)$$

は，少なくとも一つの複素数の解をもつ．

(証明)

もし，$P(z)$が一つも零点をもたないとすると，有理関数$1/P(z)$ は全平面において正則，すなわち，整関数である．

さらに

$$P(z) = z^n \left(c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots\cdots + \frac{c_0}{z^n}\right)$$

と変形すれば

$$|P(z)| = |z^n| \left|c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots\cdots + \frac{c_0}{z^n}\right|$$

$$= |z^n|\left|c_n - \left(-\frac{c_{n-1}}{z} - \cdots\cdots - \frac{c_0}{z^n}\right)\right|$$

ここで，三角不等式 $|\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ を用いると

$$\geqq |z^n|\left(|c_n| - \left|-\frac{c_{n-1}}{z} - \cdots\cdots - \frac{c_0}{z^n}\right|\right)$$

$$= |z^n|\left(|c_n| - \left|\frac{c_{n-1}}{z} + \cdots\cdots + \frac{c_0}{z^n}\right|\right)$$

ここで，三角不等式 $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$，すなわち $-|\alpha + \beta| \geqq -(|\alpha| + |\beta|) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ を用いると

$$= |z^n|\left(|c_n| - \left|\frac{c_{n-1}}{z}\right| - \cdots - \left|\frac{c_0}{z^n}\right|\right)$$

$$= |z^n|\left(|c_n| - \frac{|c_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|c_0|}{|z|^n}\right)$$

であるから，$|z| \to \infty$ に対して，$|P(z)| \to \infty$ となることがわかる．

よって，$|1/P(z)|$ は 0 に収束することがわかるので，任意の正の定数 K に対して，十分大きな正数 R をとることにより，半径 R の円の外側 $|z| > R$ では $|1/P(z)| < K$ とすることができる．

次に円の内側なる閉領域 $|z| \leqq R$ についてはどうかと考えると，ここでも $1/P(z)$ が正則であるから連続関数なので，$|1/P(z)|$ は最大値と最小値をとる．

ゆえに，円 $|z| = R$ の内外を通じての全領域において，$|1/P(z)| \leqq M$ （M はある正の定数）が成り立つこと，すなわち $P(z)$ が有界であることが示された．したがって，Liouville の定理によって，$1/P(z)$ は一つの定数であることがわかった．

これは，$P(z)$ が 1 次以上の多項式であることに反するので，$P(Z)$ は少なくとも一つの零点をもたなければならない．よって，$P(z) = 0$ は，少なくとも一つの複素数の解をもつ．

（証明終）

定理 2.3 より次の定理 2.4, 定理 2.5 が得られる．

定理 2.4

複素数係数の n 次代数方程式は，ちょうど n 個の解をもつ．
（ただし，k 重解は k 個の解として数える．）

定理 2.5

複素数係数の n 次の整式

$$P(z)=c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+c_1 z+c_0=0\quad (c_0\,,c_1,\ \cdots,c_{n-1}\,,c_n\in\mathbb{C},c_n\ \neq 0\,,n\geqq 1)$$

は, n 個の 1 次因数の積として

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_n)$$

と表される.

ただし, $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\cdots,\alpha_n$ は, n 次方程式 $P(z)=0$ の n 個の解である.

次に, 実数を係数とする n 次の代数方程式

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x+a_0=0\quad (a_0\,,a_1,\ \cdots,a_{n-1}\,,a_n\in\mathbb{R},a_n\ \neq 0\,,n\geqq 1)$$

の解の性質について述べる.

定理 2.6

実数係数の代数方程式が, $\alpha=p+qi\ \ (p,q\ \in\ \mathbb{R}\,,q\neq 0)$ という虚数解をもつならば, その共役複素数 $\bar{\alpha}=p-qi$ も解である. さらに, α が k 重解であるならば, $\bar{\alpha}$ も k 重解である.

(証明)

まず, n 次の代数方程式を $f(x)=0$ とする. 今これを

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=\{x-(p+qi)\}\{x-(p-qi)\}=\{(x-p)-qi\}\{(x-p)+qi\}=(x-p)^2+q^2$$

で割った商を $g(x)$, 余りを $Ax+B\ \ (A,B\ \in\ \mathbb{R})$ とすれば

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})g(x)+Ax+B$$

となる. ここで α が解ならば, $f(\alpha)=0$ だから, $A\alpha+B=0$ なので

$$A(p+qi)+B=0\quad \text{すなわち}\quad (Ap+B)+Aqi=0$$

実部と虚部を比較して, $Ap+B=0$, $Aq=0$ が得られるが, $q\neq 0$ より $A=0$, $B=0$ となるので $f(x)$ は $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ で割り切れることになる. したがって, $\bar{\alpha}$ も解である.

次に, α が $f(x)=0$ の k 重解, $\bar{\alpha}$ が l 重解とするとき, $k>l$ とすれば $f(x)$ は

$$\{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\}^l=\{(x-p)^2+q^2\}^l$$

で割り切れることになる. その商を $h(x)$ とすると,

$$f(x)=\{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\}^l h(x)=\{(x-p)^2+q^2\}^l h(x)$$

であるから, $h(\alpha)=0$, $h(\bar{\alpha})\neq 0$ となっている. したがって, 実数係数の代数方程式 $h(x)=0$ が α を解にもち, $\bar{\alpha}$ を解にもたないことになり矛盾を生じる.

$\bar{\alpha}$ の共役複素数は α なので, $k<l$ としても同じように矛盾を生じる.

したがって，$k = l$ が得られる．

（証明終）

定理 2.7

実数係数の n 次の整式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 \quad \left(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \geqq 1\right)$$

を，実数係数の範囲で因数分解すれば一次因数と二次因数の積

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)\{(x-p_1)^2 + {q_1}^2\}\cdots\{(x-p_s)^2 + {q_s}^2\} \qquad (r + 2s = n)$$

となる．ここで，$f(x) = 0$ の実数解を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$， 虚数解を $p_1 \pm q_1 i, \cdots, p_s \pm q_s i$ とした．ただし，

$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, p_1, \cdots, p_s, q_1, \cdots, q_s \in \mathbb{R}$ とする．

3. 部分分数分解

変数 x の関数が 2 つの整式 $F(x), G(x)$ の商

$$\frac{F(x)}{G(x)} \quad (G(x) \neq 0)$$

であるとき，この関数を x の有理関数または分数式関数という．

これについて

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x), \qquad (\deg R < \deg G)$$

となるような整式 $Q(x), R(x)$ があるので

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{Q(x)G(x) + R(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}, \qquad (\deg R < \deg G)$$

と表すことができる．よって，有理関数では分子の次数が分母の次数より低いものについて考えればよい．

定理3.1

有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\deg f < \deg g)$$

において，分母が互いに素な因数 $g_1(x), g_2(x)$ の積として

$$g(x) = g_1(x)g_2(x) \qquad (\deg g_1 \geqq 1,\ \deg g_2 \geqq 1)$$

と分解されるとき，ある適当な整式 $f_1(x)$，$f_2(x)$ が存在して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \qquad (\deg f_1 < \deg g_1,\ \deg f_2 < \deg g_2)$$

と表される．

（証明）

$g_1(x)$ と $g_2(x)$ が互いに素なので，ある整式 $p_1(x)$, $p_2(x)$ が存在して

$$p_1(x)g_1(x)+p_2(x)g_2(x)=1$$

となる．したがって

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\{p_1(x)g_1(x)+p_2(x)g_2(x)\}}{g_1(x)g_2(x)}=\frac{f(x)p_1(x)}{g_2(x)}+\frac{f(x)p_2(x)}{g_1(x)}\cdots(*)$$

と書くことができる．さらに

$$f(x)p_2(x)=q_1(x)g_1(x)+f_1(x),\quad (\deg f_1<\deg g_1)$$

$$f(x)p_1(x)=q_2(x)g_2(x)+f_2(x),\quad (\deg f_2<\deg g_2)$$

となるような整式 $q_1(x)$, $q_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ がある．よって

$$(*)=\frac{q_1(x)g_1(x)+f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{q_2(x)g_2(x)+f_2(x)}{g_2(x)}=q_1(x)+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+q_2(x)+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

となる．あとは，$q_1(x)+q_2(x)=0$ を示せばよい．

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q_1(x)+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+q_2(x)+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

の両辺に $g(x)=g_1(x)g_2(x)$ をかけると

$$f(x)=q_1(x)g(x)+f_1(x)g_2(x)+q_2(x)g(x)+f_2(x)g_1(x)$$

$$f(x)=g(x)\{q_1(x)+q_2(x)\}+f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)$$

となる．ところが，$f(x)$, $f_1(x)g_2(x)$, $f_2(x)g_1(x)$ の次数はいずれも $g(x)$ の次数よりも小さいから

$$q_1(x)+q_2(x)=0$$

でなければならない．

（証明終）

さらにこの論法を繰り返し用いることにより，以下の結果が得られる．

定理3.2

有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)}\quad(\deg f<\deg g)$$

において，分母がどの2つも互いに素な因数 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\cdots$, $g_m(x)$ の積として

$$g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)\qquad(\deg g_k\geqq 1,\quad k=1,2,\cdots,m)$$

と分解されるとき，ある適当な整式 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_m(x)$ が存在して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_m(x)}{g_m(x)}, \qquad (\deg f_k < \deg g_k, \quad k = 1,2,\cdots,m)$$

と表される.

定理3.3

有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (\deg f < \deg g)$$

において，分母が整式$p(x)$のl乗として

$$g(x) = \{p(x)\}^l \qquad (\deg p \geqq 1)$$

と分解されるとき，ある適当な整式$r_1(x)$，$r_2(x)$, ⋯ ,$r_l(x)$ をとることによって

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r_1(x)}{p(x)} + \frac{r_2(x)}{p(x)^2} + \cdots + \frac{r_l(x)}{p(x)^l}$$

（ただし， $\deg r_1 < \deg p$， $\deg r_2 < \deg p$, ⋯ , $\deg r_l < \deg p$ ）

と表すことができる.

（証明）

*以下の議論が成り立つことついては，p.9 の（**定理3.3 の証明の補足**）が理解の助けになる.

これから述べるようなl回の割り算を行うことにより，整式$r_1(x)$，$r_2(x)$, ⋯ ,$r_l(x)$ が得られることを示す.

$$f(x) = q_l(x)p(x) + r_l(x), \qquad (\deg r_l < \deg p)$$

$$q_l(x) = q_{l-1}(x)p(x) + r_{l-1}(x), \qquad (\deg r_{l-1} < \deg p)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_3(x) = q_2(x)p(x) + r_2(x), \qquad (\deg r_2 < \deg p)$$

$$q_2(x) = q_1(x)p(x) + r_1(x), \qquad (\deg r_1 < \deg p)$$

すると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q_l(x)p(x) + r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_l(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_{l-1}(x)p(x) + r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-2}} + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{q_3(x)}{\{p(x)\}^2} + \frac{r_3(x)}{\{p(x)\}^3} + \cdots + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_2(x)p(x) + r_2(x)}{\{p(x)\}^2} + \frac{r_3(x)}{\{p(x)\}^3} + \cdots + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_2(x)}{p(x)} + \frac{r_2(x)}{\{p(x)\}^2} + \frac{r_3(x)}{\{p(x)\}^3} + \cdots + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= \frac{q_1(x)p(x) + r_1(x)}{p(x)} + \frac{r_2(x)}{\{p(x)\}^2} + \frac{r_3(x)}{\{p(x)\}^3} + \cdots + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

$$= q_1(x) + \frac{r_1(x)}{p(x)} + \frac{r_2(x)}{\{p(x)\}^2} + \frac{r_3(x)}{\{p(x)\}^3} + \cdots + \frac{r_{l-1}(x)}{\{p(x)\}^{l-1}} + \frac{r_l(x)}{\{p(x)\}^l}$$

なので，両辺に $g(x) = \{p(x)\}^l$ をかけると

$$f(x) = q_1(x)\{p(x)\}^l + r_1(x)\{p(x)\}^{l-1} + r_2(x)\{p(x)\}^{l-2} + \cdots + r_l(x)$$

となる．

ところが $f(x), r_1(x)\{p(x)\}^{l-1}, r_2(x)\{p(x)\}^{l-2}, \cdots, r_l(x)$ の次数はすべて $g(x) = \{p(x)\}^l$ の次数よりも小さいので $q_1(x) = 0$ でなければならない．

したがって

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r_1(x)}{p(x)} + \frac{r_2(x)}{p(x)^2} + \cdots + \frac{r_l(x)}{p(x)^l}$$

が得られる．

（証明終）

（定理3.3 の証明の補足）

有理関数

$$\frac{2x^2 + 4x + 1}{(x-2)^3} \cdots\cdots ①$$

について考える．

$(2x^2 + 4x + 1) \div (x-2)$ を実行することにより

$$① = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x-2)^3} = \frac{(2x+8)(x-2) + 17}{(x-2)^3} = \frac{2x+8}{(x-2)^2} + \frac{17}{(x-2)^3} \cdots\cdots ②$$

となることがわかる．さらに，$(2x+8) \div (x-2)$ を実行することにより

$$② = \frac{2(x-2)+12}{(x-2)^2} + \frac{17}{(x-2)^3} = \frac{2}{x-2} + \frac{12}{(x-2)^2} + \frac{17}{(x-2)^3}$$

が得られる．

例題1

定理3．3において，$g(x) = (x-a)^l$（a は定数）の場合は

$$\frac{f(x)}{(x-a)^l} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-a)^l} \quad (A_1, A_2, \cdots, A_l \text{は定数})$$

となる

例題2

定理3．3において，$g(x) = (x^2+ux+v)^l$（u, v は定数）の場合は

$$\frac{f(x)}{(x^2+ux+v)^l} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+ux+v} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+ux+v)^2} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+ux+v)^l}$$

（$B_1, C_1, B_2, C_2, \cdots, B_l, C_l$ は定数）

となる．

定理3．4

複素数係数の有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (\deg f < \deg g)$$

において，$g(x) = (x-\alpha)^m \cdots (x-\gamma)^s$ となっているならば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \cdots\cdots + \frac{c_1}{x-\gamma} + \frac{c_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots + \frac{c_s}{(x-\gamma)^s}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_s \text{は定数})$$

の形に一意的に表される．

（証明）

定理3．2より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^m} + \cdots\cdots + \frac{q(x)}{(x-\gamma)^s}$$

$$(\deg p < m, \cdots, \deg q < s)$$

と表される．さらに，定理3．3より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \cdots\cdots + \frac{c_1}{x-\gamma} + \frac{c_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots + \frac{c_s}{(x-\gamma)^s}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_s \text{は定数})$$

の形に表されることがわかる．

一方，部分分数分解表示の一意性について考える．

今，2通りに分解されて

$$\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{a_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_m}{(x-\alpha)^m}+\cdots\cdots+\frac{c_1}{x-\gamma}+\frac{c_2}{(x-\gamma)^2}+\cdots+\frac{c_s}{(x-\gamma)^s}$$
$$=\frac{a_1{}'}{x-\alpha}+\frac{a_2{}'}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_m{}'}{(x-\alpha)^m}+\cdots\cdots+\frac{c_1{}'}{x-\gamma}+\frac{c_2{}'}{(x-\gamma)^2}+\cdots+\frac{c_s{}'}{(x-\gamma)^s}$$

となったと仮定する．両辺に$(x-\alpha)^m$ をかけると

$$a_1(x-\alpha)^{m-1}+(x-\alpha)^{m-2}+\cdots+a_m+\cdots\cdots+\frac{c_1\,(x-\alpha)^m}{x-\gamma}+\cdots+\frac{c_s(x-\alpha)^m}{(x-\gamma)^s}$$
$$=\ a_1{}'(x-\alpha)^{m-1}+a_2{}'(x-\alpha)^{m-2}+\cdots+a_m{}'+\cdots\cdots+\frac{c_1{}'\,(x-\alpha)^m}{x-\gamma}+\cdots+\frac{c_s{}'(x-\alpha)^m}{(x-\gamma)^s}$$

となる．両辺に$x=\alpha$ を代入すると，$a_m=a_m{}'$ が得られる．

次に，両辺から $\frac{a_m}{(x-\alpha)^m}$ を引いた式

$$\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{a_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{c_1}{x-\gamma}+\frac{c_2}{(x-\gamma)^2}+\cdots+\frac{c_s}{(x-\gamma)^s}$$
$$=\frac{a_1{}'}{x-\alpha}+\frac{a_2{}'}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_{m-1}{}'}{(x-\alpha)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{c_1{}'}{x-\gamma}+\frac{c_2{}'}{(x-\gamma)^2}+\cdots+\frac{c_s{}'}{(x-\gamma)^s}$$

についても同様に，両辺に$(x-\alpha)^{m-1}$ をかけたものに$x=\alpha$ を代入すると，$a_{m-1}=a_{m-1}{}'$ が得られる．

以下，この操作を繰り返し続けていくと

$$a_m=a_m{}',a_{m-1}=a_{m-1}{}',\cdots,a_1=a_1{}',\cdots\cdots,c_s=c_s{}',c_{s-1}=c_{s-1}{}',\cdots,c_1=c_1{}'$$

が得られる．

したがって，部分分数分解の表示が一意的であることが示された．

（証明終）

定理3.5

実数係数の有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)}\qquad(\deg f<\deg g)$$

において，

$$g(x)=(x-a)^k\cdots(x-c)^l\,(x^2+vx+w)^s\cdots(x^2+px+q)^u$$
$$(a,\cdots,c,v,w,\cdots,p,\cdots,q\in\mathbb{R};\ v^2-4w<0,p^2-4q<0)$$

となっているならば

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots\cdots+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_k}{(x-c)^l}$$

$$+\frac{V_1x+W_1}{x^2+vx+w}+\cdots+\frac{V_sx+W_s}{(x^2+ux+w)^s}+\cdots\cdots+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{P_ux+Q_u}{(x^2+px+q)^u}$$

$$(A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots,C_1,C_2,\cdots C_l,V_1,W_1,\cdots V_s,W_s,\cdots,P_1,Q_1,\cdots P_u,Q_u\in\mathbb{R})$$

の形に表される.

（証明）

定理3.2より

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{(x-a)^k}+\cdots\cdots+\frac{q(x)}{(x-c)^l}+\frac{u(x)}{(x^2+ux+w)^s}+\cdots\cdots+\frac{v(x)}{(x^2+px+q)^u}$$

$$(\deg p<k\,,\cdots\,,\deg q<l,\deg u<2s,\cdots,\deg v<2u)$$

と表される. さらに定理3.3より

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots\cdots+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_k}{(x-c)^l}$$

$$+\frac{V_1x+W_1}{x^2+vx+w}+\cdots+\frac{V_sx+W_s}{(x^2+ux+w)^s}+\cdots\cdots+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{P_ux+Q_u}{(x^2+px+q)^u}$$

$$(A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots,C_1,C_2,\cdots C_l,V_1,W_1,\cdots V_s,W_s,\cdots,P_1,Q_1,\cdots P_u,Q_u\in\mathbb{R})$$

の形に表されることがわかる.

（証明終）

参考文献

1） 瀧澤精二「最新代数学と幾何学」廣川書店，1964
2） 洪姙植「応用複素関数」共立出版，1972
3） Lars V. Ahlfors「complex analysis third edition」McGraw-Hill International Company，1979
4） 竹内端三「函数論＜新版＞」裳華房，1966
5） 能代清「初等函数論」培風館，1954
6） 栗田稔「新訂版　基礎教養　代数と幾何」学術図書，1976
7） 淡中忠郎「代数学」朝倉書店，1960
8） 三村征雄「微分積分I」岩波全書，1970
9） 松尾吉知，川端逸典，宮原靖共著「微分積分学」昭晃堂，1974
10） 立花俊一，勝野恵子，高野優，田川正賢，成田清正著「エクササイズ複素関数」共立出版，1999
11） 立花俊一，成田清正著「エクササイズ偏微分・重積分」共立出版，1993
12） 楠田信，平居孝之，福田亮治 著「使える数学フーリエ・ラプラス変換」共立出版，1997