東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.51-56

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 14）
～行列式の符号の意味～

貴田 研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.14
~ Sense of Signs of Determinants~

by

Kenshi KIDA*1

(received on Nov. 28, 2017 & accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

n次行列式の幾何学な意味は，n個の列ベクトルで張られる平行2n面体の符号付き体積であることが，よく知られている．ところが，この符号の意味は，実数体上のn次元数ベクトル空間の向きづけであることについて解説する．

Abstract

Geometric sense of n-dimensional determinant is signed volume of parallelotope spanned by n column vectors. In this paper, we present that sense of sign of determinant is orientation of n-dimensional numerical vector space over real.

キーワード: 行列式の符号, 外積, 右手系

Keywords: *Sign of Determinant, Exterior Product, Right-Hand System*

1. はじめに

行列式の幾何学的意味として,『n 行列 A の行列式とは，A の n 個の列ベクトルで張られる平行 $2n$ 面体の符号付き体積である』というものがあるが，本論文ではこの符号の意味について述べることとする．まず準備として以下のことを証明しておく．

例題 [1)]

2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{a}+\mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$ とする．このとき，平行四辺形 $OABC$ の面積 S は，$\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$ であることを利用して，以下の(1), (2)を示せ．

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき，S は $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値に等しい．

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき，S は $\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$ に等しい．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

（証明）

(1) $S=\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2}=\sqrt{a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2}=\sqrt{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$

であるから，S は $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ の絶対値に等しい．

(2)

$$\begin{aligned} S&=\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2} \\ &=\sqrt{\left(a_2^2b_3^2-2a_2b_2a_3b_3+a_3^2b_2^2\right)+\left(a_3^2b_1^2-2a_1b_1a_3b_3+a_1^2b_3^2\right)+\left(a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2\right)} \\ &=\sqrt{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2} \\ &=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \end{aligned}$$

【証明終】

2. 2 次行列式の符号

ベクトル $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を並べてできる 2 次行列 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ に対して，2 次行列式 $a_1b_2-a_2b_1$ のことを

$$|A|=|\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

と表すこととする．

第 1 章の例題(1)で示したように，$\mathbf{R}^2$ の 2 つのベクトル $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で張られる平行四辺形の面積，すなわち，2 次行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の 2 つの列ベクトルで張られる平行四辺形の面積 S は，2 次行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値に等しい．したがって，2 次行列式は，2 つの列ベクトルで張られる平行四辺形の「符号付面積」を表している．この符号は何によって決まっているかについて考えていくことにする．

ベクトル $\mathbf{a}$ を原点を中心とする回転によって，$\mathbf{b}$ に重ね合わせるときの回転角を $\theta\left(-\pi<\theta\leqq\pi\right)$ とする（ただし，反時計回りを正とする）．このとき，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ を原点のまわりに θ だけ回転させて $\dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ 倍したものとして表すことができるので

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\begin{pmatrix} a_1\cos\theta-a_2\sin\theta \\ a_1\sin\theta+a_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる.

したがって

$$
\begin{aligned}
a_1 b_2 - a_2 b_1 &= a_1 \left\{ \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \left(a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta \right) \right\} - a_2 \left\{ \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \left(a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta \right) \right\} \\
&= \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \left(a_1^2 \sin\theta + a_2^2 \sin\theta \right) \\
&= \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \left(a_1^2 + a_2^2 \right) \sin\theta \\
&= \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}|^2 \sin\theta \\
&= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta
\end{aligned}
$$

が得られる.このことから,行列式の符号を決めているのは $\sin\theta$ であり

$$
|\mathbf{a}\ \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & (0 < \theta < \pi) \\ = 0 & (\theta = 0, \pi) \\ < 0 & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}
$$

が成り立つことがわかる.

このことは,基本単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる正方形を,「伸ばしたり」「縮めたり」「回転させたり」「ゆがめたり」して,$\mathbf{e}_1$ が $\mathbf{a}$ に,$\mathbf{e}_2$ が $\mathbf{b}$ に重なるように $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で張られる平行四辺形に重ね合わせることができるときは,行列式 $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}|$ の符号は正であり,「裏返し」も加えないとそれができないときには符号は負となると言い換えることができる[1)].

3. 3次行列式の符号

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を並べてできる3次行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して,3次行列式のことを

$$
|A| = |\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

と表すこととする.

定理1[2)]

空間におけるベクトルの標準基底を $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と表す．このとき空間内の3つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して，$\Delta = \left| \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c} \right|$ とおけば

$$\Delta = \left| \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c} \right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ \text{は右手系をなす}) \\ < 0 & (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ \text{は左手系をなす}) \end{cases}$$

が成り立つ．

（証明）

ベクトル $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ を固定してベクトル $\mathbf{a}$ を原点 O のまわりに動かすときに，それが $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ によって定まる平面を横切らないようにおこなう．すると a_1, a_2, a_3 の値が変わるので，それに伴って $\Delta = \left| \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c} \right|$ の値も変わるのであるが，Δ の符号が変わることはない．なぜならば，もし符号が変わるとするならば，動かしている途中に $\Delta = \left| \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c} \right| = 0$ となるときがあるのである．ところが，$\left| \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c} \right| = 0$ となるのは，$\mathbf{a}$ が $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ によって定まる平面の上にあるときかつそのときに限る．しかし，そうならないように動かすのである．

同様のことが，$\mathbf{a}$ の代わりに $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ を動かすときにも言える．したがって，ベクトルの組 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をそれらのなす角や長さを変えずに，回転させて $\mathbf{a}$ が $\mathbf{e}_1$ と向きを込めて平行に，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ によって定まる平面の上で原点 O を通り $\mathbf{e}_1$ を載せている直線に関して $\mathbf{e}_2$ と同じ側にくるようにして，この位置に置き換えたときの $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を改めて $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ と書くことにする．このとき基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する成分は

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}' = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし}, a_1' > 0,\ b_2' > 0)$$

の形に表すことができる．

上述のことから $\Delta' = \left| \mathbf{a}'\ \ \mathbf{b}'\ \ \mathbf{c}' \right| = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & 0 & c_3' \end{vmatrix} = a_1' b_2' c_3'$ の符号は，Δ の符号と等しい．よって，

$a_1' > 0,\ b_2' > 0$ であることも考えると，Δ の符号と c_3' の符号が等しい．c_3' の正負は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の定める平面に関して $\mathbf{c}'$ が $\mathbf{e}_3$ と同じ側にあるか異なる側にあるかを示しているし，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は右手系をなしている．したがって，$\Delta > 0$ ならば $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ が右手系であるから $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は右手系をなす．$\Delta < 0$ ならば $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は左手系をなす．

【証明終】

定理2[2)]

空間内の2つのベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ について，外積 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ を

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定義すると，以下の㋐，㋑，㋒が成り立つ．

㋐　$\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ は，$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の両方に垂直である．

㋑　$\left|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\right|$ は，$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ で張られる平行四辺形の面積 S に等しい．

㋒　$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\times\mathbf{y}$ はこの順に右手系をなす．

（証明）

㋐

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=x_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=y_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=0$$

㋑　第1章の例題(2)で示したように

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}=\left|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\right|$$

㋒　3つのベクトルを $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\times\mathbf{y}$ の順に考えるとき，次の行列式が

$$\left|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\times\mathbf{y}\right|=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ x_2 & y_2 & \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2=\left|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\right|^2>0$$

であるから，$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\times\mathbf{y}$ はこの順に右手系をなす．

【証明終】

定理3[1)]

3つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で張られる平行六面体の体積 V は，3次行列式 $\left|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\right|$ の絶対値に等しい．

ただし，$\left|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\right|$ の符号は，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系をなすとき正であり，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が左手系をなすとき負である．

（証明）　3次行列式

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\right| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \\
&= \left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|\left|\mathbf{c}\right|\cos\theta \quad \left(\text{ただし，}\theta\text{は}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\text{と}\mathbf{c}\text{のなす角}\right)
\end{aligned}
$$

と表すことができる．$\left|\mathbf{c}\right|\cos\theta$ の絶対値は，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で張られる平行四辺形を底面としたときの，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で張られる平行六面体の高さを与えているので，行列式 $\left|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\right|$ の絶対値が，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で張られる平行六面体の体積に等しい．

【証明終】

4. おわりに

$\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots\cdots, \mathbf{v}_n$ を並べてできる n 次行列 $A=\left(\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right)$ に対して，n 次行列式を $\left|A\right|=\left|\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right|$ と表すことにする．また，$\mathbf{R}^n$ の向きづけ（orientation）を考える．基底の変換行列に着目して基底を二種類に分けることで向きを定める．二種類の向きは，標準基底 $\left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n\right\}$ が定める向きを標準的な向きあるいは右手系（正系）といい，$\left\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n\right\}$ で定まる向きを左手系（負系）と呼ぶ．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots\cdots, \mathbf{v}_n$ で張られる平行 $2n$ 面体 Q の体積を $m\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots\cdots, \mathbf{v}_n\right)$ とすると，Q の符号付き体積を

$$
\left|\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right| = \begin{cases} m\left(\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right) & \left(\left\{\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right\}\text{が右手系（正系）}\right) \\ -m\left(\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right) & \left(\left\{\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right\}\text{が左手系（負系）}\right) \\ 0 & \left(\left\{\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \cdots\cdots\ \mathbf{v}_n\right\}\text{が基底ではない}\right) \end{cases}
$$

により定める[3)4)]．

参考文献

1）石井伸郎，川添充，高橋哲也，山口睦共著「理工系新課程線形代数―基礎から応用まで―[改訂版]」培風館，2011
2）佐々木重夫「大学教養代数学と幾何学」養賢堂，1966
3）足助太郎「線形代数」共立出版，2012
4）服部昭「線型代数学」朝倉書店，1982