東海大学紀要情報通信学部
Vol.12,No.1,2019,pp.53-62

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その27）
～行列式の起源～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 27
~ The Origin of Determinants~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May.31, 2019 & accepted on Jul.26, 2019)

あらまし

二元一次連立方程式の解法を一般の連立一次方程式の解法に拡張することによって，行列式の概念が自然に出来上がる様子を示すことを目標とする．

Abstract

The purpose of this paper is to explain that the concept of determinants arises naturally by expanding the method of solving a simultaneous linear equation with two unknowns .

キーワード：行列式，連立一次方程式，同次一次式

Keywords: *Determinant, Simultaneous Linear Equation, Homogeneous Linear Expression*

1. はじめに

大学初年次で学ぶ線形代数の講義においては，行列式の定義が唐突に述べられることが多いが，その起源について述べることとしたい．まず最初に何といってもこの論文における解説には，髙木貞治「代数学講義改訂新版」1)を大いに参考にした．

行列式の起源は連立一次方程式の一般的解法にある．西洋の数学史において行列式はLeibnizの書簡（1678年）の中にある記載を初出としているが，その書簡が発見されたのは後年になってのことである．その後Cramerが曲線論に関する著書（1750年）において任意の数の未知数を含む連立一次方程式の解法を示してから，ようやく学界に注目され始め，後にCauchy（1815年），Jacobi（1841年）に至って，現在の行列式論の基礎が出来たのである．

行列式論を説明するに当たって，行列式を既に出来上がったものとして

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

というように，突然にその定義が述べられることが多いかと思う．しかしこれはあまりにも奇異な感を与えてしまうのではという懸念を拭い去ることができない．

このような述べ方をせずに，寧ろLeibnizやCramerの立場に帰って，どのようにして連立一次方程式の解法から，行列式なるものが自然に出て来たのかを説明しようとするものである．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 連立一次方程式の解法

2.1 二元一次連立方程式の解法

二元一次連立方程式の解法を出発点とする．2 つの文字x, yを未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0\cdots\cdots①\\ a_2x+b_2y+c_2=0\cdots\cdots② \end{cases} \tag{\#}$$

の形で与えられているとする．

このとき，$① \times b_2$ は$a_1b_2x+b_1b_2y+b_2c_1=0$ であり，$② \times (-b_1)$ は$-a_2b_1x-b_1b_2y-b_1c_2=0$ であるから，$① \times b_2+② \times (-b_1)$ により

$$(a_1b_2-a_2b_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)=0\cdots\cdots㋐$$

が得られる．

また，$① \times (-a_2)$ は$-a_1a_2x-a_2b_1y-c_1a_2=0$ であり，$② \times a_1$ は$a_1a_2x+a_1b_2y+c_2a_1=0$ であるから，$① \times (-a_2)+② \times a_1$ により

$$(a_1b_2-a_2b_1)y-(c_1a_2-c_2a_1)=0\cdots\cdots㋑$$

が得られる．

したがって，$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ ならば，㋐と㋑によって(#)の解は

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ ,\ \ y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\cdots\cdots(*)$$

であることが分かる．

上記のような消去法による解法は未知数が 3 つ以上の場合にも適用できることは明らかである．すなわち与えられた方程式を 2 つずつ組み合わせて，それから未知数の中の 1 つを消去していくことを続けて，次第に未知数の数を減少させて，最後にはただ 1 つの未知数を含む方程式を導く．

しかしながら，その最後の結果として得られる解の公式を予知することは容易ではない．

ところが，二元一次連立一次方程式の解法における解の公式の組み立て方を振り返ることにより，解の公式を三元以上の場合に拡張する手掛りを見つけることができる．(*)の形からすぐに分かることは，分母および分子に同じ形の式が現れていることである．その形は

$$u_1v_2-u_2v_1$$

であり，この式の特徴的な性質は

（イ） $u_1,\ u_2$ について同次一次式であり，$v_1,\ v_2$ についても同次一次式である．

（ロ） $u_1,\ u_2$ および $v_1,\ v_2$ の 2 組が一致する，すなわち$u_1=v_1,\ u_2=v_2$ のときには 0 に等しくなる．

の 2 つである．この 2 つの性質を唯一の根拠として，二元一次連立一次方程式の公式を導き出すことができることを説明していく．そのために，一般の同次一次式に関して述べておく必要があると考える．

n 個の変数$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の同次一次式とは

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots\cdots + C_n u_n \qquad (C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n \text{は定数})$$

の形の式のことをいう．

同次一次式は次のような性質をもつ．

1°) $\varphi(0,0,\cdots,0) = 0$

2°) $\varphi(u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n) = \varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n) + \varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$

3°) $\varphi(Cu_1, Cu_2, \cdots, Cu_n) = C \cdot \varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ （C は定数）

一般に

4°) $\varphi(Au_1 + Bv_1 \cdots + Cw_1, \cdots, Au_n + Bv_n \cdots + Cw_n)$

$$= \varphi(Au_1, \cdots, Au_n) + \varphi(Bv_1, \cdots, Bv_n) + \cdots + \varphi(Cw_1, \cdots, Cw_n)$$

$$= A \cdot \varphi(u_1, \cdots, u_n) + B \cdot \varphi(v_1, \cdots, v_n) \cdots + C \cdot \varphi(w_1, \cdots, w_n) \qquad (A, B, C \text{ は定数})$$

が得られる．これを基礎にして，次の説明を行う．

さて二元一次連立一次方程式(1)に立ち返って

$$f_1 := a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad f_2 := a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

とおく．

ここで，a_1，a_2 に関する同次一次式

$$b_2 a_1 - b_1 a_2$$

を$\varphi_a(a_1, a_2)$ と記すことにすると

$$\varphi_a(b_1, b_2) = 0$$

が成り立つ．

$\varphi_a(a_1, a_2)$ において，a_1，a_2にf_1，f_2を代入すれば，4°) によって

$$\begin{aligned}\varphi_a(f_1, f_2) &= \varphi_a(a_1 x + b_1 y + c_1,\ a_2 x + b_2 y + c_2)\\ &= \varphi_a(a_1 x,\ a_2 x) + \varphi_a(b_1 y,\ b_2 y) + \varphi_a(c_1,\ c_2)\\ &= x \cdot \varphi_a(a_1,\ a_2) + y \cdot \varphi_a(b_1,\ b_2) + \varphi_a(c_1,\ c_2)\\ &= x \cdot \varphi_a(a_1, a_2) + \varphi_a(c_1, c_2)\end{aligned}$$

すなわち

$$\varphi_a(f_1, f_2) = x \cdot \varphi_a(a_1, a_2) + \varphi_a(c_1, c_2).$$

これは，x, y についての恒等式である．

今，x, y が上の二元一次連立方程式をみたすものであれば，1°) によって

$$\varphi_a(f_1, f_2) = \varphi_a(0, 0) = 0.$$

したがって

$$x \cdot \varphi_a(a_1, a_2) + \varphi_a(c_1, c_2) = 0$$

であるから$\varphi_a(a_1, a_2) \neq 0$ならば

$$x = -\frac{\varphi_a(c_1, c_2)}{\varphi_a(a_1, a_2)} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

が得られる.

またbb_1, b_2に関する同次一次式

$$-a_2 b_1 + a_1 b_2 (= b_2 a_1 - b_1 a_2)$$

を$\varphi_b(b_1, b_2)$ と記すことにすると

$$\varphi_b(a_1, a_2) = 0$$

が成り立つ.

$\varphi_b(b_1, b_2)$ において，b_1, b_2 にf_1, f_2 を代入すれば，4°) によって

$$\begin{aligned}\varphi_b(f_1, f_2) &= \varphi_b(a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2) \\ &= \varphi_b(a_1 x, a_2 x) + \varphi_b(b_1 y, b_2 y) + \varphi_b(c_1, c_2) \\ &= x \cdot \varphi_b(a_1, a_2) + y \cdot \varphi_b(b_1, b_2) + \varphi_b(c_1, c_2) \\ &= y \cdot \varphi_b(b_1, b_2) + \varphi_b(c_1, c_2)\end{aligned}$$

すなわち

$$\varphi_b(f_1, f_2) = y \cdot \varphi_b(b_1, b_2) + \varphi_b(c_1, c_2)$$

これは，x, y についての恒等式である.

今x, y が上の二元一次方程式をみたすものであれば，1°) によって

$$\varphi_b(f_1, f_2) = \varphi_b(0, 0) = 0.$$

したがって

$$y \cdot \varphi_b(b_1, b_2) + \varphi_b(c_1, c_2) = 0$$

であるから$\varphi_b(b_1, b_2) \neq 0$ならば

$$y = -\frac{\varphi_b(c_1, c_2)}{\varphi_b(b_1, b_2)} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

が得られる.

2.2 未知数n個の連立一次方程式の解法

2.1 のような考察は任意の数の未知数の場合にも適用される．今n個の未知数$x, y, z, \cdots, w$ を含む個の連立方程式が，次のような形で与えられているとする.

$$\begin{cases} f_1 := a_1x + b_1y + c_1z + \cdots + h_1w + k_1 = 0, \\ f_2 := a_2x + b_2y + c_2z + \cdots + h_2w + k_2 = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n := a_nx + b_ny + c_nz + \cdots + h_nw + k_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

さて，ここで次のような整式Δが存在すると仮定する．

(I)各未知数のn個の係数からなるn個の組 $a_1, \cdots, a_n$；$b_1, \cdots, b_n$；$c_1, \cdots, c_n$；⋯⋯；$h_1, \cdots, h_n$がある．

Δはこれらすべてを合わせたn^2個の文字に関する整式であり，各組の文字に関して同次一次式である．

(II)もしも，任意の 2 組の文字が同一のn個で置き換えられるならば，Δは常に 0 である．

Δがn^2個の変数$a_1, \cdots, a_n$；$b_1, \cdots, b_n$；$c_1, \cdots, c_n$；⋯⋯；$h_1, \cdots, h_n$ の関数であることを示すために，次のように

$$\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

と記す．これは関数記法であり，ただn^2個の変数を一行に並べるのではなく，Δの特徴的な性質に適応するように，n行n列に並べたまでである．

いましばらくの間このような整式Δが存在すると仮定するならば，それを用いて連立一次方程式(2)から未知数の中の任意の一つを残して，その他の未知数を消去することができる．

Δは(I)によって第 1 列の文字$a_1, \cdots, a_n$に関する同次一次式であるから

$$\Delta = \varphi_a(a_1, \cdots, a_n)$$

と表して，上の 4°) をΔ に適用する．

さて，Δの第 1 列を一次式$f_1, f_2, \cdots, f_n$で置き換えるならば，4°) によって

$$\begin{aligned} &\varphi_a(f_1, f_2, \cdots, f_n) \\ &= \varphi_a(a_1x + b_1y + c_1z + \cdots + h_1w + k_1, a_2x + b_2y + c_2z + \cdots + h_2w + k_2, \cdots, a_nx + b_ny + c_nz + \cdots + h_nw + k_n) \\ &= \varphi_a(a_1x, a_2x, \cdots, a_nx) + \varphi_a(b_1y, b_2y, \cdots, b_ny) + \varphi_a(c_1z, c_2z, \cdots, c_nz) \\ &\quad + \cdots + \varphi_a(h_1w, h_2w, \cdots, h_nw) + \varphi_a(k_1, k_2, \cdots, k_n) \\ &= x \cdot \varphi_a(a_1, a_2, \cdots, a_n) + y \cdot \varphi_a(b_1, b_2, \cdots, b_n) + z \cdot \varphi_a(c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ &\quad + \cdots + w \cdot \varphi_a(h_1, h_2, \cdots, h_n) + \varphi_a(k_1, k_2, \cdots, k_n) \end{aligned}$$

すなわち

$$\Delta\begin{pmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} = x \cdot \Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} + y \cdot \Delta\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix}$$

$$+z\cdot\Delta\begin{pmatrix}c_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ c_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}+\cdots+w\cdot\Delta\begin{pmatrix}h_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ h_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}$$

$$+\Delta\begin{pmatrix}k_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}.$$

すると，Δ に関する仮定(II)によって右辺の第一項と最後の項以外は 0 になる．

したがって

$$\Delta\begin{pmatrix}f_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ f_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}=x\cdot\Delta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix}k_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}.$$

ここまでは式の変形であって，この最後の式は$x,y,z,\cdots,w$ に関する恒等式である．

もしも$x,y,z,\cdots,w$ が連立一次方程式(2)をみたすものでものであるならば，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ はすべて 0 になるから，1°) によって上の式の左辺は 0 になる．これによって

$$x\cdot\Delta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix}k_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}=0$$

であるから

$$\Delta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}\neq 0$$

ならば

$$x=-\frac{\Delta\begin{pmatrix}k_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}$$

が得られる．

また，Δ は(I)によって第 2 列の文字$b_1,\cdots,b_n$ に関する同次一次式であるから

$$\Delta=\varphi_b(b_1,\cdots,b_n)$$

と表して，上の 4°)をΔ に適用する．

さらに，Δ の第 2 列を一次式$f_1,f_2,\cdots,f_n$ で置き換えるならば，4°) によって

$$\begin{aligned}
&\varphi_b(f_1, f_2, \cdots, f_n)\\
&= \varphi_b(a_1x + b_1y + c_1z + \cdots + h_1w + k_1, a_2x + b_2y + c_2z + \cdots + h_2w + k_2, \cdots, a_nx + b_ny + c_nz + \cdots + h_nw + k_n)\\
&= \varphi_b(a_1x, a_2x, \cdots, a_nx) + \varphi_b(b_1y, b_2y, \cdots, b_ny) + \varphi_b(c_1z, c_2z, \cdots, c_nz) +\\
&\quad \cdots + \varphi_b(h_1w, h_2w, \cdots, h_nw) + \varphi_b(k_1, k_2, \cdots, k_n)\\
&= x\varphi_b(a_1, a_2, \cdots, a_n) + y\varphi_b(b_1, b_2, \cdots, b_n) + z\varphi_b(c_1, c_2, \cdots, c_n) + \cdots + w\varphi_b(h_1, h_2, \cdots, h_n) + \varphi_b(k_1, k_2, \cdots, k_n)
\end{aligned}$$

すなわち$\Delta\begin{pmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & f_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} = x\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} + y\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix}$

$$+ z\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & c_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} + \cdots + w\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & h_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & h_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix}$$

$$+\Delta\begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & k_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix}.$$

するとΔ に関する仮定(II)によって右辺の第二項と最後の項以外は 0 になる.

したがって

$$\Delta\begin{pmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & f_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} = y\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & k_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix}.$$

ここまでは式の変形であって,この最後の式は$x, y, z, \cdots, w$ に関する恒等式である.

もしも$x, y, z, \cdots, w$ が連立一次方程式(2)をみたすものでものであるならば,$f_1, f_2, \cdots, f_n$ はすべて 0 になるから,1°) によって上の式の左辺は 0 になる.これによって

$$y\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & k_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} = 0$$

であるから

$$\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{pmatrix} \neq 0$$

ならば

$$y=-\frac{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & k_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & k_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & k_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}$$

が得られる.

同様にして

$$z=-\frac{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & k_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & k_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & k_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}},\cdots\cdots\cdots,w=-\frac{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n\end{pmatrix}}{\varDelta\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n\end{pmatrix}}$$

も得ることができる.

以上の結果は$\varDelta$ という整式の存在を仮定して得られたものであるが，次にはこのような$\varDelta$ が実際に存在することを証明して，さらにその組み立て方を解説する．この$\varDelta$ が，すなわち行列式である.

3. 行列式の定義

第2章においてはp. 57の(I)(II)の性質をもつ整式$\varDelta$ の存在を仮定したが，実際に存在することを示す．ただし，記号は第2章のものをそのまま使うこととする.

まず(I)によって$\varDelta$ は各組の文字に関して同次一次式であるから

$$\varDelta=\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda}C(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda)\cdot a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots h_\lambda\cdots\cdots(1)\quad (\,C(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda)\text{は定数；}\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda\in\{1,2,\cdots,n\,\})$$

の形でなければならない.

さて，(II)の条件から生ずる結果を考察するために(1)を式変形する．例えば，a_α, b_β に着目して

$$\sum_{\gamma,\cdots,\lambda}C(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda)\cdot a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots h_\lambda=P_{\alpha\beta}\cdot a_\alpha b_\beta\qquad\left(\text{ただし，}P_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma,\cdots,\lambda}C(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda)\cdot c_\gamma\cdots h_\lambda\right)$$

と記すことにすると

$$\begin{aligned}\varDelta&=\sum_{\alpha,\beta}\ \sum_{\gamma,\cdots,\lambda}C(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda)\cdot a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots h_\lambda\\&=\sum_{\alpha,\beta}P_{\alpha\beta}\cdot a_\alpha b_\beta\\&=P_{11}\cdot a_1b_1+P_{12}\cdot a_1b_2+\cdots+P_{21}\cdot a_2b_1+\cdots+P_{\alpha\alpha}\cdot a_\alpha b_\alpha+\cdots+P_{\alpha\beta}\cdot a_\alpha b_\beta+\cdots+P_{\beta\alpha}\cdot a_\beta b_\alpha+\cdots\end{aligned}$$

となる．(II)によれば

$$a_1 = b_1\,, a_2 = b_2\,, \cdots\cdots,\ a_n = b_n$$

とするとき，$\varDelta = 0$ となるから

$$0 = P_{11}\cdot {a_1}^2 + (P_{12} + P_{21})\cdot a_1 a_2 + \cdots + P_{\alpha\alpha}\cdot {a_\alpha}^2 + \cdots + \left(P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha}\right)\cdot a_\alpha b_\beta + \cdots\cdots.$$

しかもこれは$a_1, \cdots, a_n$ に関しての恒等式になる必要があるので

$$P_{\alpha\alpha} = 0, \qquad P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha} = 0 \text{ すなわち } P_{\beta\alpha} = -P_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

が成り立たなければならない．

$P_{\alpha\alpha} = 0$ は$\varDelta$ の中に$a_\alpha b_\alpha c_\gamma \cdots h_\lambda$ のように2種類の文字a, b に同一の番号がついている項が含まれていてはならないことを示している．それは任意の2つの文字に関してそうでなければならないものである．したがって，実際に$\varDelta$ を組み立てる項は(1)において，番号$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ がすべて相異なるもののみである．すなわち$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ は$1,2, \cdots, n$ の順列でなければならない．

次に，$P_{\beta\alpha} = -P_{\alpha\beta}$ は

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda,\ \ a_\beta b_\alpha c_\gamma \cdots h_\lambda$$

のように，2つの文字a, bだけが互換されている2つの項は符号だけが異なる係数をもたなければならないことを示す．それは任意の2つの文字に関してそうでなければならないものである．今$\varDelta$ が

$$C\cdot a_1 b_2 c_3 \cdots h_n$$

の形の項を含むとすれば，この項から2つの番号の互換を偶数回行って得られる項の係数はすべて$+C$ であり，互換を奇数回行って得られる項の係数はすべて$-C$ でなければならない．結局のところ$\varDelta$ は

$$\varDelta = C\cdot \sum \pm a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda$$

のような形にならなければならない．ここで，$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ は$1,2, \cdots, n$ の順列であり，$\pm$ は偶順列のとき$+$ であり，奇順列のとき$-$ である．

逆に上記の$\varDelta$ はその形から(I)を満たすことがわかる．また$\varDelta$ において，2つの文字，例えばa, b の番号だけが互換されている項

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda,\ \ a_\beta b_\alpha c_\gamma \cdots h_\lambda,$$

は反対の符号をもつので

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots\cdots, a_n = b_n$$

であるならば

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda = a_\alpha a_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda \text{ と } -a_\beta b_\alpha c_\gamma \cdots h_\lambda = -a_\alpha a_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda$$

または

$$-a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda = -a_\alpha a_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda \text{ と } a_\beta b_\alpha c_\gamma \cdots h_\lambda = a_\alpha a_\beta c_\gamma \cdots h_\lambda$$

の形の項が登場して，2つずつがお互いに消し合って，Δは0 になる．a, bの代りに任意の2文字を取っても同様であるから，Δは(II)を満たすことがわかる．

係数Cは任意であるが，それを1としたものが，すなわち行列式であり

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{vmatrix}$$

と記す.

参考文献

1） 髙木貞治「代数学講義改訂新版」共立出版，1965