東海大学紀要情報通信学部
Vol.12,No.1,2019,pp.63-70

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 28）
～行列のかけ算の起源～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 28
~ The Origin of Multiplication of Matrices~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May.31, 2019 & accepted on Jul.26, 2019)

あらまし

まずは，行列のかけ算が一次変換の合成に基づいて定義されていることを示す．さらに，行列の積として得られた行列の行列式と元の行列の行列式の関係についても明らかにする．

Abstract

First, we show that the definition of multiplication of matrices is based on compositions of linear transformations. Further, we explain the mutual relation between multiplication of matrices and determinants.

キーワード:行列のかけ算，一次変換，同次一次式
Keywords: *Multiplication of Matrices, Linear Transformation, Homogeneous Linear Expression*

1. はじめに

大学初年次で学ぶ線形代数の講義においては，行列のかけ算の定義は唐突に述べられることが多いと思われるが，その起源について述べることとしたい．まずはn個の変数に対する一次変換（これは，n次の正方行列で表される）の合成に基づく定義から始める．そして，行列のかけ算と行列式の関係についての詳細な解説をしたい．この論文における解説には，髙木貞治「代数学講義改訂新版」[1)]を大いに参考にした．

この解説で鍵となるところのn個の変数$u_1, u_2, \cdots, u_n$の同次一次式とは

$$f(u_1, u_2, \cdots, u_n) = C_1u_1 + C_2u_2 + \cdots\cdots + C_nu_n \qquad (C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n\text{は定数})$$

の形の式のことをいう．

また，第3章においては次の定理を応用した証明をおこなう．

定理1.1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のようにm行n列に配列された変数の多項式

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

が次の条件

（I） 各行の変数に関して同次一次式.

（II） どの 2 つの行が一致した場合でも，0 になる.

を満たすならば

① $m > n$ のとき，$f = 0.$

② $m = n$ のとき，$f = cD.$

ただし，D は上の行列が正方行列となる場合の行列式であり，c は任意の定数.

③ $m < n$ のとき，$f = c_1D_1 + c_2D_2 + \cdots\cdots + c_kD_k.$

ただし，$D_1, D_2, \cdots\cdots, D_k$ は上の行列から m 列ずつを取って作られる

$$k = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

個の行列式で，$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_k$ は任意の定数である.

2. 行列のかけ算

行列のかけ算の起源は一次変換の合成にある.

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の同次一次式として次のように

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n\,,$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

$$x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n$$

と表されるとする．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の任意の関数 F において，上の $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の一次式を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に代入するとき，F は $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の関数として表される．このように $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を旧変数，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ を新変数と見なす変形を一次変換という.

上の一次変換を略して次のように見やすく記す.

$$(x) = A(y).$$

(x), (y) はそれぞれ n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ および $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を代表し，A は (1) の右辺における係数の行列を表す．すなわち

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

今n個の変数(y)が第 2 の一次変換によってn個の変数(z)に換えられるとする（ただし，(z)はn個の変数$z_1, z_2, \cdots, z_n$ を代表している）．すなわち

$$y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n\,,$$

$$y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

$$y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z + \cdots + b_{nn}z_n$$

あるいは略して

$$(y) = B(z), \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

(2)を(1)へ代入すれば，変数(x)は変数(z)の同次一次式として表され，(x)と(z)の間の一次変換が生ずる．その一次変換を

$$x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n\,,$$

$$x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3}$$

$$x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n$$

と表す．あるいは略して

$$(x) = C(z), \qquad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく．

このようにして生ずる一次変換(3)を一次変換(1)に一次変換(2)を合成したものという．あるいは一次変換の係数のみに着眼して，行列Aに行列Bをかけて行列Cを得るという．式では

$$A\cdot B = C$$

と書く．さて行列Cの各成分を計算する．$c_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$は，$x_i$を$(z)$の同次一次式として表すときの$z_j$の係数である．この代入の計算をすると

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n$$

$$= a_{i1}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1j}z_j + \cdots + b_{1n}z_n)$$

$$+a_{i2}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2j}z_j + \cdots + b_{2n}z_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_{in}\left(b_{n1}z_1+b_{n2}z+\cdots+b_{nj}z_j+\cdots+b_{nn}z_n\right)$$

$$=\cdots\cdots\cdots+\left(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\right)z_j+\cdots\cdots\cdots.$$

したがって

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

が得られる．すなわちc_{ij}は行列Aの第i行の成分$a_{i1},a_{i2},\cdots\cdots,a_{in}$と行列$B$ の第j行の成分$b_{1j},b_{2j},\cdots\cdots,b_{nj}$とを番号順にかけ合わせた積の和である．

一次変換の合成または行列のかけ算は，上記よりも広く考えることが出来る．

l個の変数(x)がm個の変数(y)の同次一次式として与えられ，それらのm個の変数(y)がn個の変数(z)が与えられた場合でも，上と同様の代入を行えば，l個の変数(x)が結局はn個の変数(z)の同次一次式として表されることに変わりはない．この場合にも

$$(x)=A(y),\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{lm}\end{pmatrix},$$

$$(y)=B(z),\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix},$$

として，代入した結果を

$$(x)=C(z),\qquad C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{l1}&c_{l2}&\cdots&c_{ln}\end{pmatrix},$$

とすれば

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\,.$$

3．行列式のかけ算

第 2 章で述べた行列のかけ算において，A,Bが共にn次行列ならば$C=A\cdot B$もn次行列になる．これらの行列式をそれぞれ$|A|,|B|,|C|$と記せば

$$|C|=|A|\,|B|$$

という多項式の乗法に関する恒等式が成り立つことをこの章では証明する．尚Aが(m,n)型行列で，Bが(n,m)型行列の場合には$C=A\cdot B$はm次行列になるが，その行列式$|C|$と行列A,Bの関係についても同時に述べる．

定理3.1

A が (m,n) 型行列，B が (n,m) 型行列で

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

であり

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

とすれば行列式$|C|$について次の式が成り立つ．

（1） $m=n$ のとき，　$|C|=|A|\,|B|.$

（2） $m<n$ のとき

$$|C|=\sum_{s=1}^{k}|A_s|\,|B_s|, \qquad k=\binom{n}{m}.$$

（3） $m>n$ のとき，$|C|=0.$

ただし，(2)における記号の意味は次の通りである．

行列A のn 個の列からm 個の列を選び出す方法が$k=\binom{n}{m}$ 通りあり，行列B のn 個の行からm 個の行を選び出す方法も$k=\binom{n}{m}$ 通りある．それらの組合せの各々に適宜第1番から第k番までの番号を付ける．その中の第s番目をs_1，s_2，$\cdots\cdots\cdots$，s_m　(ただし，$s_1<s_2<\cdots\cdots\cdots<s_m$) として，$A$ からはs_1 列，s_2 列，…，s_m 列，そしてB からはs_1 行，s_2 行，…，s_m 行を選び出して，次のm 次行列の組

$$A_s=\begin{pmatrix} a_{1s_1} & a_{1s_2} & \cdots & a_{1s_m} \\ a_{2s_1} & a_{2s_2} & \cdots & a_{2s_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{ms_1} & a_{ms_2} & \cdots & a_{ms_m} \end{pmatrix}, \quad B_s=\begin{pmatrix} b_{s_1 1} & b_{s_1 2} & \cdots & b_{s_1 m} \\ b_{s_2 1} & b_{s_2 2} & \cdots & b_{s_2 m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{s_m 1} & b_{s_m 2} & \cdots & b_{s_m m} \end{pmatrix}$$

を構成する．すなわち，A_s とB_s は，A とB における同番号の列と行とを同一の順に並べて作ったm 次の行列式である．

（注意）

A_s の列とB_s の行の順序を同じように変更しても，積$|A_s|\,|B_s|$の値は変わらないので$s_1<s_2<\cdots\cdots\cdots<s_m$としても差し支えない．

（証明）

定理1.1を応用して証明する．

(1)

$m = n$ のとき，$|C|$ を n^2 個の変数 $a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{nn}$ の多項式として考察する．C の第 p 行の成分 $c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pn}$ は A の第 p 行の成分 $a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pn}$ の同次一次式である．

したがって，$|C|$ は A の各行の成分に関して同次一次式である．

さらに，A の第 p 行と第 q 行が一致したとする．すなわち

$$a_{pj} = a_{qj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

とすると

$$c_{pj} = c_{qj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

なので，$|C| = 0$ となる．

よって，定理1.1②より

$$|C| = \alpha |A| \cdots\cdots ㋐ \qquad (\alpha \text{ は，} a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{nn} \text{ に関しての定数})$$

となっていることがわかる．

この定数因子 α を決定するために，$a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{nn}$ に特別の数値を与えて㋐の両辺を比較することとする．すなわち

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq J) \end{cases}$$

とすれば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となり，このとき $|A| = 1$ である．

そして

$$C = A \cdot B$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

により

$$c_{ij} = b_{ij} \qquad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

であるから，$C=B$ すなわち $|C|=|B|$になる．

したがって，㋐において$|B|=\alpha$となるから

$$|C|=|A|\,|B|$$

が得られる．

(2)

$m<n$のとき，$|C|$をmn 個の変数$a_{11},a_{12},\ \cdots\cdots,a_{mn}$の多項式として考察する．$|C|$の第$p$行の成分 $c_{p1},c_{p2},\cdots,c_{pn}$はAの第$p$行の成分$a_{p1},a_{p2},\cdots,a_{pn}$の同次一次式である．

したがって，$|C|$はAの各行の成分に関して同次一次式である．さてAの第p行と第q行が一致したとする．すなわち

$$a_{pj}=a_{qj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

とするならば

$$c_{pj}=c_{qj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

であるから，$|C|=0$となる．

よって，定理1.1③より

$$|C|=\alpha_1|A_1|+\alpha_2|A_2|+\cdots+\alpha_k|A_k|=\sum_{s=1}^{k}\alpha_s|A_s|\cdots ㋑$$

($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$は，$a_{11},a_{12},\cdots\cdots,a_{mn}$に関しての定数)

が成り立つ．

ここでは定数因子α_s $(s=1,2,\cdots,k)$を決定するために，$a_{11},a_{12},\ \cdots\cdots,a_{mn}$に特別な数値を与えてみることとする．すなわち

$$\begin{cases} a_{1s_1}=a_{2s_2}=\cdots\cdots=a_{ms_m}=1 \\ a_{ij}=0 \qquad\qquad (\text{上記以外}) \end{cases}$$

とする．したがって，A_sは単位行列であり，A_l $(l\neq s)$はすべての成分が0 となる列を含むから

$$|A_l|=\begin{cases} 1 & (l=s) \\ 0 & (l\neq s) \end{cases}$$

となっている．よって，この特別な数値に対して㋑より

$$|C|=\alpha_s$$

が成り立つ．一方，この場合の特別な数値に対して$C=A\cdot B$はどうなっているかを考える．

Cの(p,q)成分は

$$c_{pq}=a_{p1}b_{1q}+\cdots+a_{ps_p}b_{s_pq}+\cdots+a_{pn}b_{np} \qquad (p=1,2,\cdots,m\,;\ q=1,2,\cdots,n)$$

であるが，$a_{ps_p} = 1$，$a_{pj} = 0 \ (j \neq s_p)$ であるから

$$c_{pq} = b_{s_p q}$$

が得られる.

よって上の特別な数値に対しては，$C = B_s$ となっていることがわかるので，$|C| = |B_s|$ が得られる.

したがって，$\alpha_s = |B_s|$ となっていることがわかり，㋑により

$$|C| = |A_1||B_1| + |A_2||B_2| + \cdots + |A_k||B_k| = \sum_{s=1}^{k} |A_s||B_s|$$

が示された.

(3)

$m > n$ のとき，次の2つのm 次行列

$$A' = \left(A \mid 0_{m,m-n}\right),\ B' = \left(\frac{B}{0_{m-n,m}}\right) \qquad \text{(ただし，} 0_{\mathrm{s,t}} \text{ は} (s\,,t)\text{型零行列を表す.)}$$

とおけば

$$A' \cdot B' = \left(A \mid 0_{m,m-n}\right) \cdot \left(\frac{B}{0_{m-n,m}}\right) = A \cdot B$$

が得られる.

これによって(1)の結果を利用して

$$|C| = |A \cdot B| = \left|A \mid 0_{m,m-n}\right| \left|\frac{B}{0_{m-n,m}}\right| = 0$$

が示された.

（証明終）

参考文献

1） 髙木貞治「代数学講義改訂新版」共立出版，1965