東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.71-84

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 23）
～コーシー・シュワルツの不等式～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 23
~ Cauchy-Schwarz Inequality ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

線形代数においてよく知られている不等式として，コーシー･シュワルツの不等式がある. この論文ではコーシー･シュワルツの不等式を証明して，幾つかの具体例を紹介することを目標とする.

Abstract

As a well-known inequality in linear Algebra, we give the Cauchy-Schwarz inequality. The purpose of this paper is to present a proof and several concrete examples of the Cauchy-Schwarz inequality.

キーワード:内積空間, ノルム, コーシー･シュワルツの不等式
Keywords: *Inner Product Space, Norm, Cauchy-Schwarz Inequality*

1. はじめに

大学初年次の線形代数において，線形空間（または，ベクトル空間）について学ぶ．さらに内積の定義された線形空間のことを，内積空間（または，計量ベクトル空間）という．これに関してコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれるものが成り立つことが知られている．

定理（コーシー・シュワルツの不等式）

内積空間Vの任意の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対して

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

すなわち

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

が成り立つ．等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ または$\boldsymbol{b} = k'\boldsymbol{a}$ の形と表される場合に限る．ただし，$k, k' \in K$.

この論文では，線形空間そして内積空間の定義を述べることから始めて，内積が定義されたならばノルム（幾何学的ベクトルの長さに相当するもの）が定義されることを示す．そして，コーシー・シュワルツの不等式の証明を実内積空間と複素内積空間の両方の場合について証明する．また，内積空間の幾つかの具体例とそれに伴って，コーシー・シュワルツの不等式の具体例について紹介する[1)2)3)4)5)].

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor

2. 内積空間

この章では，最初に線形空間の公理を述べることから始めて，内積空間の公理を述べたのち，内積について成り立つ性質について述べることにする．

まず，線形空間の公理は，次の通りである．

公理（線形空間）

ベクトルの集合$V \neq \phi$ とスカラーK において，次の 2 つの演算

（和） 任意 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$

（スカラー倍） 任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ と $k \in K$ に対して，$k\boldsymbol{a} \in V$

が定義されて，次の演算法則

I.（和について）

(1) 交換法則 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 結合法則 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(3) 任意の $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ となるような，特別な元$\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$が存在する（$\boldsymbol{0}$ を零ベクトルと呼ぶ）．

(4) 任意の $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{0}$ となるような，特別な元$\boldsymbol{a}' \in \boldsymbol{V}$が存在する（$\boldsymbol{a}'$ を$\boldsymbol{a}$ の逆元と呼び$-\boldsymbol{a}$ と表す）．

II.（スカラー倍について）

(1) 分配法則 $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$

(2) 分配法則 $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

(3) 結合法則 $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$

(4) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

が成り立つとき，V をK 上の線形空間(または，ベクトル空間)という．

※ スカラーを実数$\mathbb{R}$にとるときは，V を実線形空間(実数上の線形空間)，スカラーを複素数$\mathbb{C}$にとるときは，V を複素線形空間(複素数上の線形空間)という．

次に，内積空間の公理を述べる．

公理（内積空間）

実線形空間V において，任意の 2 つの$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，実数$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が定義されて次の条件

(1) 対称性 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(2) 線形性 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(3) 線形性 $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (k \in \mathbb{R})$

(4) 正値性 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$（等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.）

を満たすとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$を$\boldsymbol{a}$ と$\boldsymbol{b}$ の内積という．

一方，V が複素線形空間の場合には，内積$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$の値は複素数として，上の 4 つの条件は

(1)′ 共役対称性 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

(2)　線形性　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

(3)′　線形性　$(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\quad(k\in\mathbb{C})$

(4)　正値性　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geqq 0$　（等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.）

と置き換える．このときの内積を特にエルミート内積ということもある.

内積が定義された線形空間を，内積空間（または，計量線形空間）という．スカラーが実数であるか複素数であるかを区別したいならば，それぞれ実内積空間，複素内積空間（または，ユニタリー空間）と呼ぶ.

内積については，公理から次のことが示される.

定理 2.1

内積空間V において，次のことが成り立つ.

① $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})=0$

② $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$

③ $(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\quad(k\in\mathbb{R})$

④ $(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b})=\bar{k}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\quad(k\in\mathbb{C})$

（証明）

①　$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$ であるから$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})$である.

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})$ の両辺に$-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})$ を加えると$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ が得られる.

同様にして，$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ も示される.

②　実内積空間の場合は

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

として示される.

複素内積空間の場合には

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}=\overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}=\overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}+\overline{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

として示される.

③　$(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\quad(k\in\mathbb{R})$

④　$(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b})=\overline{(k\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}=\overline{k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}=\bar{k}\ \overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}=\bar{k}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\quad(k\in\mathbb{C})$

（証明終）

3. 内積空間の具体例

この章では，内積空間の例を 7 つ挙げて，それらのすべてについて内積が定義されていることの詳細な証明を与える [6)7)8)].

例 3.1

実線形空間$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

と定義すれば，内積となる．これを$\mathbb{R}^n$ の標準内積という.

（証明）

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = {}^t({}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{b}\,{}^t({}^t\boldsymbol{a}) = {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = {}^t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = ({}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

(3) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = k\,{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \quad (k\in\mathbb{R})$

(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2 \geqq 0$

であり，等号が成り立つのは，$a_1=0,\ a_2=0,\cdots,a_n=0$ すなわち，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.

（証明終）

例 3.2

複素線形空間$\mathbb{C}^n$ の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = (a_1,\ \ a_2,\ \ \cdots\ \ ,a_n)\begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{pmatrix} = a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n}$$

と定義すれば，内積となる．これを$\mathbb{C}^n$ の標準内積という.

（証明）

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = {}^t\left({}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}\right) = {}^t\left(\overline{\boldsymbol{b}}\right){}^t({}^t\boldsymbol{a}) = \overline{{}^t\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \overline{{}^t\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{a}}} = \overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = {}^t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\overline{\boldsymbol{c}} = ({}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b})\overline{\boldsymbol{c}} = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{c}}+{}^t\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

(3) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t(k\boldsymbol{a})\overline{\boldsymbol{b}} = k\,{}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \quad (k\in\mathbb{R})$

(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} = (a_1,\ \ a_2,\ \ \cdots\ \ ,a_n)\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix} = a_1\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}+\cdots+a_n\overline{a_n} = |a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2 \geqq 0$

であり，等号が成り立つのは，$a_1=0,\ a_2=0,\cdots,a_n=0$ すなわち，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.

（証明終）

例 3.3

実線形空間$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}$　　（ただし，A は正値対称行列）

と定義すれば，内積となる.

（証明）

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b} = {}^t({}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{b}{}^tA\,{}^t({}^t\boldsymbol{a}) = {}^t\boldsymbol{b}A\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = {}^t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})A\boldsymbol{c} = ({}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b})A\boldsymbol{c} = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{c}+{}^t\boldsymbol{b}A\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

(3) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t(k\boldsymbol{a})A\boldsymbol{b} = k\,{}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \quad (k\in\mathbb{R})$

(4) A は正値対称行列なので，任意の$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{a} \geqq 0$

であり，等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.

（証明終）

例えば，2次対称行列$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$について考える．次の定理によって，$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$は

$$|A_1|=2>0\,,\qquad |A_2|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{vmatrix}=3>0$$

であることから，正値対称行列であることがわかる．

定理

実数を成分とする$\boldsymbol{n}$次行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

に対して

$$|A_k|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

を，$\boldsymbol{k}$次主対角小行列式(首座行列式)という．

$\boldsymbol{n}$次対称行列Aについて，Aが正値であるための必要十分条件

$$|A_k|>0\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

である．

さて，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned}{}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}&=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=(2a_1-3a_2\,,-3a_1+6a_2)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\\ &=2a_1b_1-3a_1b_2-3a_2b_1+6a_2b_2\end{aligned}$$

であるから

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2a_1b_1-3a_1b_2-3a_2b_1+6a_2b_2$$

と定義すれば，内積となる．

この例3.3において，正値対称行列を $A=E$としたものが，例3.1である．

例 3.4

複素線形空間$\mathbb{C}^n$の2つのベクトル$\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}$ に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})={}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{b}}\qquad \text{（ただし，}A\text{は正値エルミート行列）}$$

と定義すれば，内積となる．

（証明）

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})={}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{b}}={}^t\left({}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{b}}\right)={}^t\left(\overline{\boldsymbol{b}}\right){}^tA\,{}^t({}^t\boldsymbol{a})=\overline{{}^t\boldsymbol{b}}\bar{A}\boldsymbol{a}=\overline{{}^t\boldsymbol{b}A\overline{\boldsymbol{a}}}=\overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})={}^t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})A\overline{\boldsymbol{c}}=({}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b})A\overline{\boldsymbol{c}}={}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{c}}+{}^t\boldsymbol{b}A\overline{\boldsymbol{c}}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

(3) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})={}^t(k\boldsymbol{a})A\overline{\boldsymbol{b}}=k\,{}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{b}}=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\qquad (k\in\mathbb{R})$

(4) Aは正値エルミート行列なので，任意の$\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})={}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{a}}\geqq 0$$

であり，等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る．

（証明終）

例えば，2 次エルミート行列$A=\begin{pmatrix}3 & -2i\\ 2i & 8\end{pmatrix}$ について考える．次の定理によって，$A=\begin{pmatrix}3 & -2i\\ 2i & 8\end{pmatrix}$ は

$$|A_1|=3>0\,,\qquad |A_2|=\begin{vmatrix}3 & -2i\\ 2i & 8\end{vmatrix}=20>0$$

であることから，正値エルミート行列であることがわかる．

定理

複素数を成分とするn次行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

に対して

$$|A_k|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

を，k 次主対角小行列式(首座行列式)という．

n 次エルミート行列A について，A が正値であるための必要十分条件

$$|A_k|>0\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

である．

さて，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ に対して，

$$\begin{aligned}{}^t\boldsymbol{a}A\overline{\boldsymbol{b}}&=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}3 & -2i\\ 2i & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{b_1}\\ \overline{b_2}\end{pmatrix}=(3a_1+2ia_2\,,-2ia_1+8a_2)\begin{pmatrix}\overline{b_1}\\ \overline{b_2}\end{pmatrix}\\ &=3a_1\overline{b_1}-2ia_1\overline{b_2}+2ia_2\overline{b_1}+8a_2\overline{b_2}\end{aligned}$$

であるから

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=3a_1\overline{b_1}+8a_2\overline{b_2}+2\left(-a_1\overline{b_2}+a_2\overline{b_1}\right)i$$

と定義すれば，内積となる．

この例 3.4 において，正値エルミート行列を $A=E$ としたものが，例 3.2 である．

例 3.5

実数を成分とする(k,l)型行列全体の集合$M_{k,l}(\mathbb{R})$ の 2 つの元A,B に対して

$$(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)$$

と定義すれば，内積となる．

（証明）

(1) $(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)=\mathrm{tr}\{{}^t({}^tA\,B)\}=\mathrm{tr}\{{}^tB\,{}^t({}^tA)\}=\mathrm{tr}({}^tBA)=(B,A)$

(2) $(A+B,C)=\mathrm{tr}\{{}^t(A+B)C\}=\mathrm{tr}\{({}^tA+{}^tB)C\}=\mathrm{tr}({}^tAC+{}^tBC)=\mathrm{tr}({}^tAC)+\mathrm{tr}({}^tBC)=(A,C)+(B,C)$

(3) $(kA,B)=\mathrm{tr}\{{}^t(kA)B\}=\mathrm{tr}(k\,{}^tA\,B)=k\mathrm{tr}({}^tA\,B)=k(A,B)\qquad (k\in\mathbb{R})$

(4)

今，A の(i,j)成分をa_{ij}，B の(i,j)成分をb_{ij} $(i=1,2,\cdots,k\,;\ j=1,2,\cdots,l)$ とおけば

$$\begin{aligned} {}^tAB\text{の}(r,r)\text{成分} &= \sum_{s=1}^{k}\left\{{}^tA\text{の}(r,s)\text{成分}\right\}\times\left\{B\text{の}(s,r)\text{成分}\right\} \qquad (r=1,2,\cdots,l) \\ &= \sum_{s=1}^{k} a_{sr}\, b_{sr} \end{aligned}$$

であるから

$$(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\,B)=\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{k} a_{sr}\, b_{sr}$$

となっている．これより

$$(A,A)=\mathrm{tr}({}^tA\,A)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} {a_{ij}}^2$$

であり，等号が成り立つのは $a_{ij}=0$ $(i=1,2,\cdots,k\,;\ j=1,2,\cdots,l)$, すなわち $A=\mathbf{0}$ のときに限る．

（証明終）

この例 3.5 において，$M_{k,l}(\mathbb{R})$ を$M_{n,1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^n$ としたものが，例 3.1 である．

例 3.6

複素数を成分とする(k,l)型行列全体の集合$M_{k,l}(\mathbb{C})$の 2 つの元A,Bに対して

$$(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\bar{B})$$

と定義すれば，内積となる．

（証明）

(1) $(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\bar{B})=\mathrm{tr}\{{}^t({}^tA\bar{B})\}=\mathrm{tr}\{{}^t(\bar{B})\,{}^t({}^tA)\}=\mathrm{tr}\left(\overline{{}^tB}A\right)=\mathrm{tr}\left(\overline{{}^tB\bar{A}}\right)=\overline{\mathrm{tr}({}^tB\bar{A})}=\overline{(B,A)}$

(2) $(A+B,C)=\mathrm{tr}\{{}^t(A+B)\bar{C}\}=\mathrm{tr}\{({}^tA+{}^tB)\bar{C}\}=\mathrm{tr}({}^tA\bar{C}+{}^tB\bar{C})=\mathrm{tr}({}^tA\bar{C})+\mathrm{tr}({}^tB\bar{C})=(A,C)+(B,C)$

(3) $(kA,B)=\mathrm{tr}\{{}^t(kA)\bar{B}\}=\mathrm{tr}(k\,{}^t\!A\bar{B})=k\mathrm{tr}({}^tA\,\bar{B})=k(A,B) \qquad (k\in\mathbb{C})$

(4)

今，A の(i,j)成分をa_{ij}，B の(i,j)成分をb_{ij} $(i=1,2,\cdots,k\,;\ j=1,2,\cdots,l)$ とおけば

$$\begin{aligned} {}^tA\bar{B}\text{の}(r,r)\text{成分} &= \sum_{s=1}^{k}\left\{{}^tA\text{の}(r,s)\text{成分}\right\}\times\left\{\bar{B}\text{の}(s,r)\text{成分}\right\} \qquad (r=1,2,\cdots,l) \\ &= \sum_{s=1}^{k} a_{sr}\, \overline{b_{sr}} \end{aligned}$$

であるから

$$(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\bar{B})=\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{k} a_{sr}\, \overline{b_{sr}}$$

となっている．これより

$$(A,A)=\mathrm{tr}({}^tA\,A)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\,\overline{a_{ij}}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\left|a_{ij}\right|^2$$

であり，等号が成り立つのは $a_{ij}=0$ $(i=1,2,\cdots,k\,;\ j=1,2,\cdots,l)$, すなわち $A=\mathbf{0}$ のときに限る．

（証明終）

この例 3.6 において，$M_{k,l}(\mathbb{C})$ を $M_{n,1}(\mathbb{C})=\mathbb{C}^n$ としたものが，例 3.2 である．

例 3.7

閉区間 $[a,b]$ で連続な実数値関数全体のつくる実線形空間 $C([a,b];\mathbb{R})$ の 2 つの元 f,g に対して

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

と定義すれば，内積となる．

（証明）

(1)

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=(g,f)$$

(2)

$$\begin{aligned}(f+g,h)&=\int_a^b\{f(x)+g(x)\}h(x)dx\\&=\int_a^b\{f(x)h(x)+g(x)h(x)\}dx\\&=\int_a^b f(x)h(x)dx+\int_a^b f(x)h(x)dx\\&=(f,h)+(g,h)\end{aligned}$$

(3)

$$(kf,g)=\int_a^b kf(x)g(x)dx=k\int_a^b f(x)g(x)dx=k(f,g)\qquad(k\in\mathbb{R})$$

(4)

$$(f,f)=\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx\geqq 0$$

であり，等号が成り立つのは $f=\mathbf{0}$ のときに限る．

（証明終）

例 3.8

閉区間 $[a,b]$ で連続な複素数値関数全体のつくる複素線形空間 $C([a,b];\mathbb{C})$ の 2 つの元 f,g に対して

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義すれば，内積となる．

（証明）

（1）

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=\int_a^b \overline{g(x)}f(x)dx=\int_a^b \overline{g(x)\overline{f(x)}}\,dx=\overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}\,dx}=\overline{(g,f)}$$

（2）　$(f+g,h)=\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\overline{h(x)}dx$

$$=\int_a^b\left\{f(x)\overline{h(x)}+g(x)\overline{h(x)}\right\}dx$$

$$=\int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx+\int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

（3）　$(kf,g)=\int_a^b kf(x)\overline{g(x)}dx=k\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=k(f,g)\qquad(k\in\mathbb{C})$

（4）

$$(f,f)=\int_a^b f(x)\,\overline{f(x)}dx=\int_a^b |f(x)|^2\,dx\geqq 0$$

であり，等号が成り立つのは $f=\mathbf{0}$ のときに限る．

（証明終）

4. コーシー・シュワルツの不等式

内積空間Vにおいては，その内積を用いて，各ベクトルの長さに相当するノルムと呼ばれるものが定義される．

定義（ノルム）

内積空間V の任意のベクトル$\boldsymbol{a}$に対して，$\sqrt{(a,a)}$ をベクトルのノルム（または，長さ）といい，$\|\boldsymbol{a}\|$ で表す．すなわち

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})},\qquad \|\boldsymbol{a}\|^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$$

である．

ベクトルのノルムに関する基本的な性質について述べる．

1.　$\|\boldsymbol{a}\|\geqq 0\qquad(\|\boldsymbol{a}\|=\mathbf{0}\iff \boldsymbol{a}=\mathbf{0})$

2.　$\|k\boldsymbol{a}\|=|k|\|\boldsymbol{a}\|\qquad(k\in K)$

（2．の証明）

（I）　実内積空間の場合（$K=\mathbb{R}$ の場合）

$$\|k\boldsymbol{a}\|^{\mathbf{2}}=(k\boldsymbol{a},k\boldsymbol{a})=k^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$$

であるから

$$\|k\boldsymbol{a}\|=\sqrt{k^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\sqrt{k^2}\,\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=|k|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

が成り立つことが示された．

（II）　複素内積空間の場合（$K=\mathbb{C}$ の場合）

$$\|k\boldsymbol{a}\|^{\mathbf{2}}=(k\boldsymbol{a},k\boldsymbol{a})=k\bar{k}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=|k|^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$$

であるから

$$\|k\boldsymbol{a}\|=\sqrt{|k|^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\sqrt{|k|^2}\,\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=|k|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

次に，コーシー・シュワルツの不等式と呼ばれるものを，実内積空間の場合と複素内積空間の場合に分けて述べて，証明する．

実内積空間の場合は以下のようになる．

定理4.1（コーシー・シュワルツの不等式）

実内積空間Vの任意の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対して

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ または$\boldsymbol{b}=k'\boldsymbol{a}$ の形になっている場合に限る．ただし，$k,k' \in \mathbb{R}$.

（証明）

(1)　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$のときは，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，$\|\boldsymbol{a}\|=0$であるから$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|=0$，$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|=0$である．

したがって，$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ は等号の意味で成り立つ．

(2)　$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$のときは，任意の実数$t$に対して

$$\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\geqq 0$$

が成り立つ．これを書き直すと

$$\begin{aligned}(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= (t\boldsymbol{a},t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &=(t\boldsymbol{a},t\boldsymbol{a})+(t\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\ &=t^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+t(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\ &=t^2\|\boldsymbol{a}\|^2+t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2\\ &=t^2\|\boldsymbol{a}\|^2+2t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2 \geqq 0\end{aligned}$$

となる．tについての 2 次不等式の，t^2の係数は$\|\boldsymbol{a}\|^2>0$であり，この不等式は任意の実数tに対して成り立つのだから，判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2-\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\leqq 0$$

であるから

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\leqq\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

より

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つことが示された．

一方，等号が成り立つ場合について考える．

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$のときに等号が成り立つのは，$\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=0$すなわち $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$の場合であるから，$\boldsymbol{b}=-t\boldsymbol{a}$ と

書くことができるので，$k' = -t$ とおけば $\boldsymbol{b} = k'\boldsymbol{a}$ の形となる．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときも等号が成り立つが，$\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{b}$ の形となっている．したがって，$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = k'\boldsymbol{a}$ の形になっている．

逆に，$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ の形であれば

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = |(k\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})| = |k(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})| = |k|\,|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})| = |k|\|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{b}\|(|k|\|\boldsymbol{b}\|) = \|\boldsymbol{b}\|\|k\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

である．また，$\boldsymbol{b} = k'\boldsymbol{a}$ の形の場合も同様に

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = |(\boldsymbol{a},k'\boldsymbol{a})| = |k'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})| = |k'|\,|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})| = |k'|\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|(|k'|\|\boldsymbol{a}\|) = \|\boldsymbol{a}\|\|k'\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

となり，等号が成り立つことがわかる．

（証明終）

一方，複素内積空間の場合は以下のようになる．

定理4.2（コーシー・シュワルツの不等式）

複素内積空間 V の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

（証明）

(1)　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ のときは，$0 = |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ であるから成り立つ．

(2)　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{0}$ のときは，任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t\|^2 &= (\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t) + \big((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t\big) \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t) + \big((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t,\boldsymbol{a}\big) + \big((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}t\big) \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t}\,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})t + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})t^2 \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\,t + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})t^2 \\
&= |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{b}\|^2t^2 + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2t + \|\boldsymbol{a}\|^2 \geqq \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

となる．t についての 2 次不等式の，t^2 の係数は $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 > 0$ であり，この不等式は任意の実数 t に対して成り立つのだから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^4 - |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq 0$$

であるから

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^4 \leqq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

より

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

さらに，このコーシー・シュワルツの不等式を用いて，三角不等式が成り立つことを，実内積空間の場合と複素内積空間の場合に分けて述べて，証明する．

実内積空間の場合は以下のようになる．

定理4.3（三角不等式）

実内積空間Vの任意の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対して

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

（証明）

$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2\\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2\\ &\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2+2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|+\|\boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式 $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つから

$$\begin{aligned}&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

であるから

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

定理4.4（三角不等式）

複素内積空間Vの任意の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$に対して

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ.

（証明）

$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$が成り立つことを示せばよい.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2
\end{aligned}$$

であるから

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つことが示された.

（証明終）

5. コーシー・シュワルツの不等式の具体例

第 4 章で示したコーシー・シュワルツの不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ を，これと同値な不等式

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

に書き換えたときの，例3.1，例3.2，例3.7におけるコーシー・シュワルツの不等式は次のようになる[6)7)8)].

例5.1

実線形空間$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$に対して

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq ({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2)$$

が成り立つ.

例5.2

複素線形空間$\mathbb{C}^n$ の 2 つのベクトル$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$に対して

$$\left| a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n} \right|^2 \leqq (|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2+\cdots+|b_n|^2)$$

が成り立つ.

例5.3

閉区間$[a,b]$で連続な関数全体のつくる実線形空間$C([a,b])$の 2 つの元 f,g に対して

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqq \left[\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right]\left[\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right]$$

が成り立つ.

参考文献

1） 硲野俊博，加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書，1994
2） 川久保勝夫「線形代数学」日本評論社，1999
3） 佐藤正次，永井治 共編「基礎課程線型代数学」学術図書，1976
4） 中田義元，矢部博 共著「新しい線形代数＜新訂版＞」東京教学社，199
5） 横山雄一「線形代数学」昭晃堂，1975
6） H.アントン著 山下純一訳「アントンのやさしい線型代数」現代数学社，1979
7） 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
8） 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975