東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.1,2017,pp.92-99

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 9）
～行列式の定義～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.9
~ Definition of Determinant~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 26, 2017 & accepted on Jul. 13, 2017)

あらまし

まず，行列式を平行多面体の体積として幾何学な定義をしたのち，線形変換の表現行列の行列式の意味について解説する．さらに，行列式の公理を紹介し，行列式は，本質的には交代性と多重線形性をもつ写像であり，一意性をもつことについて述べる．

Abstract

First, we define the determinant geometrically, as volume of p*arallelotope*. Next, we present a sense of determinants of representation matrices of linear transformations. Further, after we give axiom of determinant, we explain that determinants are alternative and multilinear mappings and have uniqueness.

キーワード：行列式，公理，定義，平行多面体，線形変換
Keywords: *Determinant, Axiom, Definition, Parallelotope, Linear Transformation*

1. はじめに

大学初年次に学ぶ線形代数において，n次行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，各列から1つずつ，同じ行から重複なく計n個の成分をとり，それらの積$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$を作る．この積に，さらに，置換$\sigma$の符号$\mathrm{sgn}(\sigma)$をかける．このような積は$n!$個ある．$n$次行列式はそれらの総和として

$$\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \qquad \left(\text{ただし，}S_n\text{は}n\text{次の置換の全体であり，}n\text{次対称群と呼ばれる．}\right)$$

と定義され

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad |A|,\quad \det A$$

---

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor

などの記号で表される[1)]．さらに A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ とおくとき

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

と表すこともある．この定義に基づき，基本性質として以下の(1)～(5)が示されることが多い[2)]．

(1) 転置行列の行列式の値は，元の行列の行列式の値に等しい．

(2)【n重線形性（一般には，多重線形性）】

ア）$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}'_k + \mathbf{a}''_k, \cdots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}'_k, \cdots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}''_k, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

イ）$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) = c \cdot \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(3)【交代性】

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) \qquad (i \neq j)$$

一般化すると，n文字の置換 σ に対して

$$\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \cdots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

となる．

(4) 行列 A のある列（あるいは行）に，他のある列（あるいは行）の定数倍を加えて得られる行列の行列式の値は，元の行列 A の行列式 $|A|$ に等しい．

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = |A|$$

(5) 2つの n次行列の積の行列式は，それぞれの行列式の積に等しい．

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

本論文では，行列式の幾何学的定義，行列式の公理について紹介する．

2. 行列式の幾何学的定義

まず，行列式の直観的な意味を述べることから始める[3)]．一般に $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_r \in R^n$ として，

$\overrightarrow{(P_0P_i)} = \mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$ とするとき

$$\overrightarrow{(P_0P)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \qquad (0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \,;\, i = 1, 2, \cdots, r)$$

と表されるような点 P 全体の集合を $P_0P_1, P_0P_2, \cdots, P_0P_r$ を辺とする平行多面体という．さて

『n 行列 A の行列式とは，A の n 個の列ベクトルで張られる平行 $2n$ 面体の符号付き体積である』

というものである．

i) 2次の行列式は

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

であり，平面上の２つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ で張られる平行４辺形の符号付き面積である．この場合の符号は，ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ からベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ へ回る向きが正の向き（反時計回り）のときプラス，負の向き（時計回り）のときマイナスとする．

ii）3次の行列式

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

は，空間内の３つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ で張られる平行６面体の符号付き体積である．この場合の符号は，列ベクトル $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が正の向きで並んでいるか，または，負の向きに並んでいるかで決める．ここで言うベクトル系の向きとは以下のように定める．$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が，連続変形により（途中で体積が０につぶれることなく）基本単位ベクトルの順序付き集合 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ に帰着できるとき，正の向きといい，一度鏡に写した後に，連続変形で $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ に帰着できるとき，負の向きであるという．

定理（線形変換）

n 行列 A が線形変換の表現行列のとき

① $\det A$ の絶対値は，この線形変換による体積の拡大率を表す．

② $\det A$ の符号は，この線形変換が空間の向きを保つか，それとも逆転するかを表す．■

3．行列式の公理

行列式とは本質的には，交代・多重線形写像である．この章では，行列式の第１定義（implicit な定義）について述べる．

複素数を成分とする n 次の正方行列の全体を $M(n,\ \mathbf{C})$ で表す．n 次行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ に，一つの複素数を対応させる関数

$$F : M(n,\ \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

で，次の条件 I, II, III を満たすものを行列式関数と呼び，その関数値を行列 A の行列式と呼ぶ．

I．交代性

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (i \neq j)$$

II．多重線形性

ア）$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) = F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) + F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{b}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

イ）$F(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) = c \cdot F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

III．単位行列の行列式

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$$

この条件 I, II, III のことを，行列式の公理と呼ぶことがある．

また，I. において，2 つの異なる列が等しい，すなわち，$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j = \mathbf{v} \quad (i \neq j)$ とおけば

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

となるので

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0$$

が導かれる．

したがって，2 つの異なる列が等しい行列式の値は 0 であることがわかる．

さて，次のことが成り立つ．

定理（行列式の一意性）

上記の行列式関数 F は，ただ一つだけ存在する．■

まず具体的に，2 次行列の場合について証明する．

（証明）

まず

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$$

である．すると

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = F(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \ a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$

多重線形性 II.ア)を繰り返し用いると

$$= F(a_{11}\mathbf{e}_1, \ a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, \ a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$
$$= F(a_{11}\mathbf{e}_1, \ a_{12}\mathbf{e}_1) + F(a_{11}\mathbf{e}_1, \ a_{22}\mathbf{e}_2) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, \ a_{12}\mathbf{e}_1) + F(a_{21}\mathbf{e}_2, \ a_{22}\mathbf{e}_2)$$

多重線形性 II. イ)を繰り返し用いると

$$= a_{11}a_{12}F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_1) + a_{21}a_{22}F(\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2)$$

交代性 I. により

$$F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_1) = 0, \qquad F(\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2) = 0, \ F(\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_1) = -F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2)$$

だから

$$= a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_1)$$
$$= a_{11}a_{22}F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}\{-F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2)\}$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2)$$
$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \cdot F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2)$$

単位行列の行列式 III. より $F(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2) = 1$ なので

$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

が成り立つ．

このことは，行列式の公理を満たす関数の一意性を示している．

【証明終】

次に，3 次行列の場合について証明する．

（証明）

まず

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+a_{31}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}=a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{32}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3$$

である．すると

$$F(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)=F(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3)$$

多重線形性 II. ア)を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
=\ & F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
=\ & F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1+a_{23}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3) \\
=\ & F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{11}\mathbf{e}_1,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{21}\mathbf{e}_2,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{12}\mathbf{e}_1,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{22}\mathbf{e}_2,\ a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{13}\mathbf{e}_1)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{23}\mathbf{e}_2)+F(a_{31}\mathbf{e}_3,\ a_{32}\mathbf{e}_3,\ a_{33}\mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

多重線形性 II. イ)を繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
=\ & a_{11}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+a_{11}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+a_{11}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{11}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+a_{11}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2)+a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{11}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)+a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2)+a_{11}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{21}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+a_{21}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{21}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+a_{21}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2)+a_{21}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)+a_{21}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2)+a_{21}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{31}a_{12}a_{13}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+a_{31}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+a_{31}a_{22}a_{23}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2)+a_{31}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{31}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)+a_{31}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2)+a_{31}a_{32}a_{33}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3)
\end{aligned}
$$

上式の一つの項において，i_1, i_2, i_3 の中に同じものがあれば，上述の交代性 I から導かれる性質により，$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3})=0$ であるから

$$
\begin{aligned}
=\ & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)+a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2)+a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)+a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)
\end{aligned}
$$

となる．一方，i_1, i_2, i_3 がすべて異なれば

$$
\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}
$$

は，3 文字の置換であるから，やはり交代性 I により

$$
F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3})=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)
$$

となっているから

$$
\begin{aligned}
=\ & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)+a_{11}a_{32}a_{23}\{(-1)F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\}+a_{21}a_{12}a_{33}\{(-1)F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\}\\
&+a_{21}a_{32}a_{13}\{(-1)^2F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\}+a_{31}a_{12}a_{23}\{(-1)^2F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\}+a_{31}a_{22}a_{13}\{(-1)F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\}\\
=\ & a_{11}a_{22}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)-a_{11}a_{32}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)-a_{21}a_{12}a_{33}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
&+a_{21}a_{32}a_{13}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)+a_{31}a_{12}a_{23}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)-a_{31}a_{22}a_{13}F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
=\ & (a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})\cdot F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)\\
=\ & \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)\cdot F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)
\end{aligned}
$$

単位行列の行列式 III. より $F(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)=1$ なので

$$
=\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)
$$

が成り立つ．

このことは，行列式の公理を満たす関数の一意性を示している．

【証明終】

そこで，一般の n 次行列の場合について証明する．
（証明）

まず，n 次行列 A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ とおき

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right)$$

と表すことにする．このとき，各列は

$$\mathbf{a}_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{e}_j \qquad \left(j=1,2,\cdots,n\right)$$

と表される．すると

$$F\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right)=F\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\right)$$

多重線形性 II. ア）を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
&=\sum_{i_1=1}^{n} F\left(a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\right)\\
&=\sum_{i_1=1}^{n}\left\{\sum_{i_2=1}^{n} F\left(a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1},a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2},\sum_{i_3=1}^{n} a_{i_3 3}\mathbf{e}_{i_3},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\right)\right\}\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} F\left(a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1},a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2},\cdots,a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\right)
\end{aligned}$$

多重線形性 II. イ）を繰り返し用いると

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\cdot F\left(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\cdots,\mathbf{e}_{i_n}\right)$$

となることがわかる．

　上式の一つの項において，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ の中に同じものがあれば，上述の交代性より導かれる性質により，$F\left(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\cdots,\mathbf{e}_{i_n}\right)=0$ である．一方，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ がすべて異なれば

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

は，n 文字の置換であるから，やはり交代性により

$$F\left(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\cdots,\mathbf{e}_{i_n}\right)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot F\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\right)$$

となっている．

　したがって

$$\begin{aligned}
F\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right)&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\cdot F\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\right)\\
&=\det\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right)\cdot F\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\right)
\end{aligned}$$

単位行列の行列式 III. により， $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$ なので

$$= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

が得られる．

このことは，行列式の公理を満たす関数の一意性を示している．

【証明終】

4. おわりに

本論文では，最初に行列式の定義ありきの解説とした．もっと遡ると，行列式の起源は，連立一次方程式の一般的解法にあり，1678 年のライプニッツの書簡が初出と言われている．今現在よく知られている行列式の定義が，どのようにして導き出されたのかについては，髙木貞治著「代数学講義　改訂新版」[4)]を参照されたい．

参考文献

1）小寺平治「明解演習　線形代数」共立出版，1982
2）齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会，1966
3）金子晃「線形代数講義」サイエンス社，2004
4）髙木貞治「代数学講義　改訂新版」共立出版，1965