東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.94-99

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 25）
～ヘルダーの不等式～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 25
~ Hölder Inequality ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

よく知られている結果として，ヘルダーの不等式と呼ばれるものがある.この不等式の特別な場合がコーシー・シュワルツの不等式である．この論文ではヘルダーの不等式を，詳細に証明することを目標とする.

Abstract

As a well-known result, we give the Hölder inequality. The Cauchy-Schwarz inequality is a special case of the Hölder inequality. The purpose of this paper is to present a full proof.

キーワード:内積空間, コーシー･シュワルツの不等式, ヘルダーの不等式
Keywords: *Inner Product Space , Cauchy-Schwarz Inequality , Hölder Inequality*

1. はじめに

有限次元の線形空間$\mathbb{R}^n$ において様々な不等式が知られているが，この論文ではヘルダーの不等式と呼ばれる次の不等式

定理

$$p, q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

のとき

$$\sum_{r=1}^{n} |a_r b_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n} |a_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{t=1}^{n} |b_t|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ.

について紹介することとする [1)2)].

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

この不等式において，$p=2,\ q=2$ とおけば

$$\sum_{r=1}^{n}|a_r b_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

となるから

$$\left(\sum_{r=1}^{n}|a_r b_r|\right)^2 \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^2\right)$$

が得られる．これは，コーシー・シュワルツの不等式の一つである．

2. ヘルダーの不等式

まずは準備として次の 3 つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 2.1

$p>q>0,\ x>0,\ x\neq 1$のとき

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}$$

が成り立つ．

（証明）

まず，関数

$$f(x)=\frac{x^p-1}{p}-\frac{x^q-1}{q}$$

を考えると，$f'(x)=x^{p-1}-x^{q-1}=x^{q-1}(x^{p-q}-1)$ となる．

$p-q>0$ であり，増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f	$-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$	↘	0	↗

となる．

したがって，$x>0,\ x\neq 1$のときに，$f(x)>0$ となっていることがわかる．

よって

$$\frac{x^p-1}{p}-\frac{x^q-1}{q}>0$$

すなわち

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}$$

が成り立つことが示された．

（証明終）

定理 2.2

$$p, q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

のとき

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geqq x \cdots\cdots ① \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つ.
（証明）

条件より $\frac{1}{q} > 0$ であるから，$x = 0$ のときに①が成り立つ.

また， $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ の条件より，$x = 1$ のときに①が等号として成り立つ.

さらに，$x > 0,\ x \neq 1$のときは，定理 2.1 における $q = 1$ の場合を考えると

$$\frac{x^p - 1}{p} > x - 1$$

$$\frac{1}{p}x^p + 1 - \frac{1}{p} > x$$

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} > x$$

が成り立つことが示される.

（証明終）

定理 2.3

$$p > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

のとき，実数α, β について

$$\frac{1}{p}|\alpha|^p + \frac{1}{q}|\beta|^q \geqq |\alpha||\beta| \cdots\cdots ②$$

が成り立つ.

等号が成り立つのは$|\alpha|^p = |\beta|^q$ のときに限る.
（証明）

定理 2.2 の①において$x = |\alpha||\beta|^{-\frac{1}{p-1}}$ とおくと

$$\frac{1}{p}|\alpha|^p|\beta|^{-\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} \geqq |\alpha||\beta|^{-\frac{1}{p-1}} \cdots\cdots ㋐$$

となる.

ここで，㋐の両辺に$|\beta|^{\frac{p}{p-1}}$ をかけると

$$\frac{1}{p}|\alpha|^p + \frac{1}{q}|\beta|^{\frac{p}{p-1}} \geqq |\alpha||\beta| \cdots\cdots ㋑$$

が得られる.

ところが， $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ の条件より$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ であるから

$$\frac{p}{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$$

なので ㋑により

$$\frac{1}{p}|\alpha|^p+\frac{1}{q}\ |\beta|^q \geqq |\alpha||\beta|$$

が成り立つことが示された．

等号が成り立つのは$x=|\alpha||\beta|^{-\frac{1}{p-1}}=1$ すなわち$|\alpha|=|\beta|^{\frac{1}{p-1}}$ のときである．ところが

$$\frac{1}{p-1}=\frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}=\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{q}}=\frac{q}{p}$$

であるから，$|\alpha|=|\beta|^{\frac{q}{p}}$ ，すなわち $|\alpha|^p=|\beta|^q$のときである．

（証明終）

さてこれからこの定理 2.3 を利用して，ヘルダーの不等式が成り立つことの証明を与える．

定理 2.4（ヘルダーの不等式）

$$p,q>1,\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

のとき

$$\sum_{r=1}^{n}|a_rb_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．

等号が成り立つのは

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q}=\frac{|a_2|^p}{|b_2|^q}=\ \cdots=\frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}$$

のときに限る．

（証明）

まず，定理 2.3 の②において

$$\alpha=a_r\Bigg/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad \beta=b_r\Bigg/\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}\qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

とおくと

$$|\alpha|=|a_r|\Bigg/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad |\beta|=|b_r|\Bigg/\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}\qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

であり

$$\frac{1}{p}\left(1\Big/\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)\cdot|a_r|^p+\frac{1}{q}\left(1\Big/\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)\cdot|b_r|^q\ \geqq |a_r||b_r|\Bigg/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(r=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つ．

両辺をrについて加えると

$$\frac{1}{p}\left(1\Big/\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)\cdot\sum_{r=1}^{n}|a_r|^p+\frac{1}{q}\left(1\Big/\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)\cdot\sum_{r=1}^{n}|b_r|^q \geqq 1\Big/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\sum_{r=1}^{n}|a_r||b_r|$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqq \sum_{r=1}^{n}|a_r||b_r|\Big/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$1 \geqq \sum_{r=1}^{n}|a_r||b_r|\Big/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が得られる．

したがって

$$\sum_{r=1}^{n}|a_r b_r| \leqq \left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つことが示された．

等号が成り立つのは$|\alpha|^p=|\beta|^q$ のときに限るが，このときは

$$|a_r|^p\Big/\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)=|b_r|^q\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right) \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{|a_r|^p}{|b_r|^q}=\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right) \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

となっており

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q}=\frac{|a_2|^p}{|b_2|^q}=\cdots=\frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}\left\{=\left(\sum_{s=1}^{n}|a_s|^p\right)\Big/\left(\sum_{t=1}^{n}|b_t|^q\right)\right\}$$

の場合である．

（証明終）

3. 積分におけるヘルダーの不等式

この章では，積分におけるヘルダーの不等式について述べる[3]．

領域$\Omega\subset\mathbb{R}^n$の可測関数$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して，そのp次ノルムを

$$\|f\|_p=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

と定義する．これが有限であるときにfはp乗可積分であると言われる．これについては，以下のことが知られている．

定理 3. 1

$$p, q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

のとき，領域Ω上のp乗可積分関数$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$，$q$乗可積分関数$g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$に対して，積$f(x)g(x)$は$\Omega$上の可積分関数であり，次の不等式

$$\int_{\Omega} |f(x)||g(x)|\,dx \leqq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q\,dx \right)^{1/q}$$

が成り立つ.

（証明）　略.

参考文献

1） 渡部隆一「不等式入門」森北出版，1969
2） 北山毅，松尾吉知，松下朝夫 共著「全問精解微積分演習」聖文社，1976
3） 矢野公一「距離空間と位相構造」共立出版，1997