東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.1,2021,pp.25-33

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 37）
～ 逆ラプラス変換のための複素関数論からの準備 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.37
~ Preparation for Inverse Laplace Transforms from Theory of Complex Functions ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May. 28, 2021 & accepted on Aug. 3, 2021)

あらまし

逆ラプラス変換の計算方法の一つとして，複素積分を用いたものがある．孤立特異点と留数の計算方法に重点を置くことにより、複素関数論の習熟度が十分でない学生にとっても、逆ラプラス変換の準備を整えやすくする学習教材を提案する．

Abstract

As a method for calculating inverse Laplace transforms, we sometimes use means of complex integrals. As a preparation from Theory of complex functions, we give explanation of isolated singularity and residue. The important subject is calculus for residues.

キーワード : ブロムウィッチ積分，ローラン展開，孤立特異点，留数，留数定理
Keywords: *Bromwich's Integral, Laurent Series, Isolated Singularity, Residue, Residue Theorem*

1. はじめに

逆ラプラス変換の計算方法の一つとして，次の複素関数論を用いた方法がある [1)].

定理

$t>0$ で定義された関数$f(t)$と $f'(t)$ は区分的に連続であるとする．また，$\mathrm{Re}\,s>\beta$ を満たす複素数sについて

$$\int_0^{\infty}|e^{-st}f(t)|\,dt$$

が有限確定であるとする．このとき$F(s)=\mathcal{L}[\,f(t)\,]$とすれば，$\sigma>\beta$ を満たす実数の定数σについて，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-Ti}^{\sigma+Ti}e^{st}F(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}F(s)\,ds\cdots\cdots(*)$$

上記の定理で，関数$f(t)$が連続であるならば

定理（ラプラス逆変換公式）

$f(t)$ が，$t>0$ で定義された連続関数で， $f'(t)$ は区分的に連続であるとする．またβ を実数の定数として

$$F(s)=\mathcal{L}[\,f(t)\,],\qquad \mathrm{Re}\,s>\beta$$

とする．さらに， $\mathrm{Re}\,s>\beta$ であるような s に対して

---

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus), Professor

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt$$

は有限確定であるとする．このときσ を$\sigma > \beta$ である実数の定数とすれば

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-Ti}^{\sigma+Ti} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

が成り立つ.

上式をラプラス逆変換公式といい，これを次のように書き表す.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds \cdots\cdots (*)$$

右辺の積分のことを，$F(s)$ のブロムウィッチ積分（Bromwich’s Integral）と呼ぶ．ブロムウィッチ積分を，留数定理を用いて計算することにより，次の公式が得られる.

定理（留数定理を用いた逆ラプラス変換の計算）

$\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds$ において，複素変数 s の関数 $F(s)$ は有限個の極$s_1, s_2, \cdots, s_k$ を除いて全平面で正則であり，$\mathrm{Re}\, s_j < \sigma \quad (j = 1,2,\cdots,k)$ とする．さらに，原点 $s = 0$ を中心として，($s_1, s_2, \cdots, s_k$ を含むような)十分大きな半径 R の円周 $|s| = R$ 上のおいて

$$|F(s)| \leqq \frac{M}{R^n} \quad (n > 1,\ M > 0)$$

であるならば，留数定理により

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds = 2\pi i\left(\sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_m\,]\right) = 2\pi i(\mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_1\,] + \cdots + \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_k\,])$$

であるから，$(*)$ により$F(s)$ の逆ラプラス変換について

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= f(t) \\ &= \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_m\,] \\ &= \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_1\,] + \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_2\,] + \cdots + \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_k\,] \end{aligned}$$

が成り立つ.

本論文においては，上記の計算方法を運用するための複素関数論の習熟度が十分ではない人のために，留数定理を使うための最短コースというべきものを示したい．特に，極の留数の求め方を重視して詳しく述べた．執筆にあたり多くの好著を参考にさせていただいた[2)3)4)5)6)7)8)9)10)11)12)13)14)15)16)].

2. 逆ラプラス変換のためのラプラス変換からの準備

この章では敢えて複素積分の定義に触れないことにする．ラプラス変換と逆ラプラス変換の計算を行うにおいて差し支えはないと考えるからである．

2.1 ローラン(Laurent)展開

定理（ローラン展開）

$f(z)$ は，a を中心とする半径R の円の内部から a を除いた領域で正則（微分可能）とする．このとき，$f(z)$ は，

$0 < |z-a| < R$ において，a を中心とするローラン展開

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \cdots + \frac{b_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{b_{-1}}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + b_n(z-a)^n + \cdots \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-a)^m
\end{aligned}
$$

で表される．ここで，係数b_k は，a を中心とし半径がR より小さい円をCとするとき，積分

$$
b_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\, d\zeta \qquad (m = \cdots - n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)
$$

で与えられる．

2.2 孤立特異点

関数$f(z)$ が$z=a$ で正則でないとき，点a を$f(z)$ の特異点という．

次に，関数$f(z)$ が$z=a$ で正則でないが，点a を中心とする十分小さな円の周および（a を除いた）内部

$0 < |z-a| < R$ において正則である場合を考える．このとき，点a を$f(z)$ の孤立特異点という．

【特記事項】孤立特異点ではない特異点 [10)11)]

例えば，関数

$$
f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}
$$

の特異点は

$$
z = 0,\ \ \frac{1}{n\pi} \quad (n = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots)
$$

である．ここで

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0
$$

であることから，点$z=0$ を中心とするどのように小さな円も内部に$f(z)$ の特異点を含むことがわかる.

したがって，$z=0$ は孤立特異点ではない.

点a が関数$f(z)$ の孤立特異点であるとし，$f(z)$ の a を中心とするローラン展開を

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{-m}}{(z-a)^m}+\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-a)^m$$

とする．このとき，負のべきの部分

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{-m}}{(z-a)^m}$$

を，ローラン展開の主要部という.

主要部の形に応じて，孤立特異点を次の 3 つに分類する.

(1)　除去可能な特異点・・・主要部の項がない.

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-a)^m=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots+b_n(z-a)^n+\cdots$$

点a を$f(z)$ の除去可能な特異点という．除去可能な特異点aについて，改めて$f(a)=b_0$と定義すれば，$f(z)$は点a で正則となる.

例

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{1}{3\,!}z^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\,!}z^{2n-2}+\cdots$$

点0 は除去可能な特異点である．改めて$f(0)=1$と定義すれば，$f(z)$は点$z=0$ で正則となる．言い換えると，次の関数$g(z)$は点$z=0$ で正則である.

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & (z\neq 0)\\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

(2)　極（k 位の極）・・・主要部の項が有限個

$$f(z)=\frac{b_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{b_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{b_{-1}}{z-a}+\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-a)^m\qquad(b_{-k}\neq 0)$$

点a を$f(z)$ の極といい，kをその極の位数という．点a をk 位の極ということもある.

例

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

に対して

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{m=0}^{\infty}(2m+3)(z-1)^m \qquad (0<\ |z-1|<1)$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{-1}{z-2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(z-2)^m \qquad (0<\ |z-2|<1)$$

であるから，点1 は1 位の極であり，点2 は2 位の極である．

(3)　真性特異点・・・主要部の項が無限個

$$f(z)=\cdots\cdots+\frac{b_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{b_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{b_{-1}}{z-a}+\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-a)^m$$

点a を$f(z)$ の真性特異点という．

例

$$e^{\frac{1}{z}}=\cdots\cdots+\frac{1}{n\,!}\frac{1}{z^n}+\cdots+\frac{1}{z}+1$$

点0 は真性特異点である．

2.3 留数

点a が関数$f(z)$の孤立特異点であり，$0<|z-a|<R$ で$f(z)$ は正則であるとする．このとき，点a を中心とするローラン展開を

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{-m}}{(z-a)^m}+\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-a)^m$$

とするとき

$$\frac{1}{z-a}$$

の係数 b_{-1}を，点a における$f(z)$ の留数といい，$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]$と書く．

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=b_{-1}$$

である．

ここで

$$b_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\ dz$$

が成り立っており

$$\int_C f(z)\ dz=2\pi i\cdot b_{-1}$$

すなわち

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,] \cdots\cdots (*)$$

が示される.

上式$(*)$を拡張したものが，後述する『留数定理』である.

2.4 極の位数と留数

定理

点a が $f(z)$ の$k(k=1,2,3,\cdots)$位の極であるであるための必要十分条件は

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \text{または} \quad (z-a)^k f(z)=g(z)$$

の形となることである．ここに$g(z)$は，$g(a)\neq 0$であり，ある円$|z-a|=R$の内部（点a を含む）で正則な関数である.

定理（極の留数の求め方）

［1］点a が$f(z)$ の 1 位の極である場合

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

［2］点a が$f(z)$ のk 位の極である場合

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=\frac{1}{(k-1)\,!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-a)^k f(z)\} \qquad (k=2,3,\cdots)$$

［3］関数

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

において，$g(z)$，$h(z)$ が点aで正則かつ$g(a)\neq a$，$h(a)=0$，$h'(a)\neq 0$ であるとき，点a は$f(z)$ の 1 位の極であり

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

が成り立つ.

例題（極の留数の求め方）

次の関数$f(z)$の孤立特異点を求め, それぞれの孤立特異点における留数を求めよ.

$$(1)\ \frac{z+1}{z^2-5z+6} \quad (2)\ \frac{1+i\,z}{(z+2\,i)(z-2\,i)} \quad (3)\ \frac{z^3}{(z-2\,i)^2} \quad (4)\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \quad (5)\ \frac{1}{z^2(z+i)^3}$$

（解答）

(1)

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-2)(z-3)}$$

であるから，点$z=2$ と $z=3$ が，それぞれ１位の極である．

よって，[1]により

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,2\,]=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to2}\frac{z+1}{z-3}=\frac{2+1}{2-3}=-3,$$
$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,3\,]=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to3}\frac{z+1}{z-2}=\frac{3+1}{3-2}=4.$$

（別解）[3]において，$g(z)=z+1,\ h(z)=(z-2)(z-3)$の場合である．

＊積の微分公式 $\{\alpha(z)\beta(z)\}'=\alpha'(z)\beta(z)+\alpha(z)\beta'(z)$ に留意する．

$$\frac{g(z)}{h'(z)}=\frac{z+1}{\{(z-2)(z-3)\}'}=\frac{z+1}{(z-2)'(z-3)+(z-2)(z-3)'}=\frac{z+1}{(z-3)+(z-2)}$$

である．

＊＊上式の分母は，敢えて展開して整理することをしない．次に$s=2,\ 3$ を代入するからである．

よって

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,2\,]=\frac{2+1}{(2-3)+(2-2)}=-3,$$

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,3\,]=\frac{3+1}{(3-3)+(3-2)}=4.$$

(2) 点$z=2\,i$ と $z=-2\,i$ が，それぞれ１位の極である．

よって，[1]により

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,2\,i\,]=\lim_{z\to2\,i}(z-2\,i)f(z)=\lim_{z\to2\,i}\frac{1+i\,z}{z+2\,i}=\frac{1+i\cdot2\,i}{2\,i+2\,i}=\frac{-1}{4\,i}=\frac{-1}{4\,i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{1}{4}i,$$

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,-2\,i\,]=\lim_{z\to-2\,i}(z+2\,i)f(z)=\lim_{z\to-2\,i}\frac{1+i\,z}{z-2\,i}=\frac{1+i\cdot(-2\,i)}{-2\,i-2\,i}=\frac{3}{-4\,i}=\frac{3}{-4\,i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{3}{4}i.$$

（別解）[3]において，$g(z)=1+i\,z,\ h(z)=(z+2\,i)(z-2\,i)$の場合である．

＊積の微分公式 $\{\alpha(z)\beta(z)\}'=\alpha'(z)\beta(z)+\alpha(z)\beta'(z)$ に留意する．

$$\frac{g(z)}{h'(z)}=\frac{1+i\,z}{\{(z+2\,i)(z-2\,i)\}'}=\frac{1+i\,z}{(z+2\,i)'(z-2\,i)+(z+2\,i)(z-2\,i)'}=\frac{1+i\,z}{(z-2\,i)+(z+2\,i)}$$

である．

＊＊上式の分母は，敢えて展開して整理することをしない．次に$s=2\,i,-2\,i$ を代入するからである．

よって

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,2\,i\,]=\frac{1+i\cdot2\,i}{(2\,i-2\,i)+(2\,i+2\,i)}=\frac{-1}{4\,i}=\frac{-1}{4\,i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{1}{4}i,$$

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,-2\,i\,]=\frac{1+i\cdot(-2\,i)}{(-2\,i-2\,i)+(-2\,i+2\,i)}=\frac{3}{-4\,i}=\frac{3}{-4\,i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{3}{4}i.$$

(3) 点$z=2\,i$ が，2 位の極である．

よって，[2]により

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,2\,i\,]=\frac{1}{(2-1)\,!}\lim_{z\to 2\,i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\{(z-2\,i)^2f(z)\}=\frac{1}{1\,!}\lim_{z\to 2\,i}\frac{d}{dz}z^3=\lim_{z\to 2\,i}3z^2=3\cdot(2\,i)^2=-12.$$

(4) 点$z=1$ が，3 位の極である．

よって，[2]により

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,1\,]=\frac{1}{(3-1)\,!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\{(z-1)^3f(z)\}=\frac{1}{2\,!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(e^{2z})=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}4e^{2z}=\frac{1}{2}\cdot 4e^2=2e^2.$$

（補足）

$$(e^{2z})'=e^{2z}\cdot(2z)'=2e^{2z},\quad (e^{2z})''=(2e^{2z})'=2e^{2z}\cdot(2z)'=4e^{2z}.$$

(5) 点$z=0$ が 2 位の極， $z=-\,i$ が 3 位の極である．

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,0\,]=\frac{1}{(2-1)\,!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\{z^2f(z)\}=\frac{1}{1\,!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+\ i)^3}=\lim_{z\to 0}\frac{-3}{(z+i)^4}=\frac{-3}{i^4}=-3,$$

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,-\,i\,]=\frac{1}{(3-1)\,!}\lim_{z\to -i}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\{(z+i)^3f(z)\}=\frac{1}{2\,!}\lim_{z\to -i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{6}{z^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{(-i)^4}=3.$$

（補足）

$$\left\{\frac{1}{(z+\ i)^3}\right\}'=\{(z+i)^{-3}\}'=-3\cdot(z+i)^{-4}=\frac{-3}{(z+i)^4}.$$

$$\left(\frac{1}{z^2}\right)'=(z^{-2})'=-2\cdot z^{-3},\quad \left(\frac{1}{z^2}\right)''=(-2\cdot z^{-3})'=(-2)\cdot(-3)z^{-4}=\frac{6}{z^4}.$$

（解答終）

2.5 留数定理

次の定理は 2. で述べた式$(*)$を拡張したものであり，留数定理と呼ばれる．

定理（留数定理）

関数$f(z)$ が，単一閉曲線（自分自身と交わらない閉曲線）C の内部にk 個の孤立特異点$a_1\,,a_2\,,\cdots,a_k$をもつとき，次のことが成り立つ．

$$\int_C f(z)\ dz=2\pi i\cdot\sum_{m=1}^{k}\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a_m\,]$$

■

（参照）

定理（コーシーの積分定理）

関数$f(z)$が，単一閉曲線（自分自身と交わらない閉曲線）CとCの内部を含む領域で正則であるとするとき，次のことが成り立つ．

$$\int_C f(z)\ dz = 0$$

■

参考文献

1）貴田研司，“大学初年次における数学教材の提案（その12）～留数定理を利用した逆ラプラス変換の計算～，”東海大学紀要情報通信学部，Vol.10,No.2,2017,pp33-40
2）福田安蔵，鈴木七緒，安岡善則，黒崎千代子 共編「詳解　応用解析演習」共立出版，1970
3）楠田信，平居孝之，福田亮治 著「使える数学フーリエ・ラプラス変換」共立出版，1997
4）大月卓郎，大芝猛，市川朗，竹内康博 共著「応用数学」学術図書，1987
5）樋口禎一，八高隆雄「フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本」牧野書店，2000
6）水本久夫「解析学の基礎」培風館，1989
7）田代嘉宏「ラプラス変換とフーリエ解析要論　第２版新装版」森北出版，2014
8）水本久夫「解析学の基礎」培風館，1989
9）田河生長，斎藤四郎，斎藤斉，高遠節夫 共著「応用数学」大日本図書，1995
10）上野健爾監修，高専の数学教材研究会「応用数学」森北出版，2013
11）上野健爾監修，工学系 数学教材研究会編「応用数学」森北出版，2015
12）矢野健太郎，石原繁 共著「解析学概論 新版」裳華房，1982
13）矢野健太郎，石原繁 共著「大学演習 解析学概論」裳華房，1967
14）矢野健太郎，石原繁 共著「基礎解析学コース 複素解析」裳華房，1995
15）矢野健太郎，石原繁 共著「基礎解析学コース 応用解析」裳華房，1996
16）C.R.ワイリー著，富久泰明訳「工業数学上・下」ブレイン図書出版，1973