東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.1,2021,pp.44-56

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 39）～逆ラプラス変換のいくつかの計算方法～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.39 ~ Methods of Calculations of Inverse Laplace Transforms ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May. 28, 2021 & accepted on Aug. 3, 2021)

あらまし
大学初年次で学ぶ応用数学の中の重要な項目として，ラプラス変換とその応用がある．その逆変換の計算方法として部分分数分解を用いるもの，ヘヴィサイドの展開定理を用いたもの，そして複素積分を用いたものがある．この論文では，これら 3 つの計算方法を比較し，それらの特徴が理解できることを目指した学習教材を提案する．

Abstract
As important items in applied mathematics studied in the first grade, we give lectures on Laplace transforms and their applications. As methods for calculating inverse Laplace transforms, we sometimes use means of partial fraction decompositions, Heaviside Expansion Theorem, and complex integral. The purpose of this paper is to compare the three methods.

キーワード：部分分数分解，ブロムウィッチ積分，極，留数定理，ヘヴィサイドの展開定理
Keywords: *Partial Fraction Decomposition, Bromwich's Integra, Pole, Residue Theorem, Heaviside Expansion Theorem*

1. はじめに

工学系・情報系の専門基礎科目としての数学系科目に，逆ラプラス変換の計算が登場する．これについて，以下の 3 つの方法が知られている．

・ラプラス変換の一意性に基づく方法

2つの関数 $f_1(t)$ と$f_2(t)$ が連続であるとき

$$\mathcal{L}[\,f_1(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

であるならば

$$f_1(t) = f_2(t)$$

となる．

このことを根拠として，与えられた関数 $F(s)$ をラプラス変換としてもつ，すなわち

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

となるような連続関数 $f(t)$ は一意的に定まるということがわかる．この$f(t)$ を $F(s)$ の逆ラプラス変換といい

$$\mathcal{L}^{-1}[\,F(s)] = f(t)$$

と表す．

このことに基づき，付録に載せたラプラス変換対応表を用いるなどして逆ラプラス変換を求めることを，本論文においては，ラプラス変換の一意性に基づく方法と呼ぶことにする．

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus), Professor

・ ヘヴィサイド（Heaviside）の展開定理を用いる方法

$P(s)$, $Q(s)$ が互いに素なs の多項式であり，$P(s)$ の次数は$Q(s)$ の次数より低いとする．このとき

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

の逆ラプラス変換の計算方法の一つとして次のことが知られており，ヘヴィサイドの展開と呼ばれる．

［1］ $Q(s)=(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)$ であり，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ はすべて異なる数であるとき

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}e^{a_1 t}+\frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}e^{a_2 t}+\cdots\cdots+\frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}e^{a_n t}$$

である．

［2］ $Q(s)=(s-a)^n$ のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=e^{at}\Bigg\{&\frac{P(a)}{0!\cdot(n-1)!}t^{n-1}+\frac{P'(a)}{1!\cdot(n-2)!}t^{n-2}+\frac{P''(a)}{2!\cdot(n-3)!}t^{n-3}\\&+\frac{P^{(3)}(a)}{3!\cdot(n-4)!}t^{n-4}+\cdots\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!\cdot(n-k-1)!}t^{n-k-1}\\&+\cdots\cdots+\frac{P^{(n-2)}(a)}{(n-2)!\cdot 1!}t+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\cdot 0!}\Bigg\}\end{aligned}$$

である．

［3］ $P(s)=As+B$, $Q(s)=(s-a)^2+b^2$ （A,B,a,b は実数）のとき，$P(a+bi)$ （i は虚数単位）の実部をA_1，虚部をA_2 とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{1}{b}e^{at}(A_1\sin bt+A_2\cos bt)$$

である．

・留数定理（複素積分）を用いた方法 [1)]

定理（ラプラス逆変換公式）

$f(t)$ が，$t>0$ で定義された連続関数で，$f'(t)$ は区分的に連続であるとする．またβ を実数の定数として

$$F(s)=\mathcal{L}[\,f(t)\,],\qquad \mathrm{Re}\,s>\beta$$

とする．

さらに， $\mathrm{Re}\, s > \beta$ であるような s に対して

$$\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt$$

は有限確定であるとする．このとき σ を $\sigma > \beta$ である実数の定数とすれば

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - Ti}^{\sigma + Ti} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

が成り立つ.

上式をラプラス逆変換公式といい，これを次のように書き表す.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds \cdots\cdots (*)$$

右辺の積分のことを，$F(s)$ のブロムウィッチ積分（Bromwich’s Integral）と呼ぶ．ブロムウィッチ積分を，留数定理を用いて計算することにより，次の公式が得られる.

定理（留数定理を用いた逆ラプラス変換の計算）

$(*)$ の $\displaystyle\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds$ において，複素変数 s の関数 $F(s)$ は有限個の極 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ を除いて全平面で正則であり，$\mathrm{Re}\, s_j < \sigma \quad (j = 1,2,\cdots,k)$ とする．さらに，原点 $s = 0$ を中心として，($s_1, s_2, \cdots, s_k$ を含むような)十分大きな半径 R の円周 $|s| = R$ 上のおいて

$$|F(s)| \leqq \frac{M}{R^n} \quad (n > 1,\ M > 0)$$

であるならば，$(*)$ に留数定理を適用することによって，$F(s)$ の逆ラプラス変換について

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(\sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_m \,] \right) \\ &= \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_m \,] \\ &= \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_1 \,] + \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_2 \,] + \cdots + \mathrm{Res}[\, e^{st} F(s), s_k \,] \end{aligned}$$

が成り立つことが示される.

本論文においては，同じ関数の逆ラプラス変換を上記3つの方法で行うことにより，それぞれの手法の特徴を理解してもらうことを目標とする．執筆にあたり多くの好著を参考にさせていただいた[2)3)4)5)6)7)8)9)10)11)12)13)14)15)16)].

2. 逆ラプラス変換の計算例

例題

次の関数$F(s)$の逆ラプラス変換を求めよ．

$$(1)\quad \frac{3s^2+2S+1}{(s-1)(s+2)(s-3)} \qquad (2)\quad \frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3} \qquad (3)\quad \frac{4s-5}{s^2-6s+13}$$

（解答）

(1)

（ラプラス変換の一意性に基づく方法）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at} \quad (a \text{ は定数})$$

を利用するために，部分分数分解を行う．

$$\frac{3s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3}$$

となるような定数A,B,C の値を求める．両辺に$(s-1)(s+2)(s-3)$ をかける．

$$3s^2+2s+1=A(s+2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s+2)$$

これはs についての恒等式であり，両辺のs にどのような値を代入しても成り立つ．

両辺に$s=1$ を代入すると

$$3+2+1=A(1+2)(1-3) \Leftrightarrow 6=-6A \Leftrightarrow A=-1.$$

両辺に$s=-2$ を代入すると

$$12-4+1=B(-2-1)(-2-3) \Leftrightarrow 9=15B \Leftrightarrow B=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

両辺に$s=3$ を代入すると

$$27+6+1=C(3-1)(3+2) \Leftrightarrow 34=10C \Leftrightarrow C=\frac{34}{10}=\frac{17}{5}.$$

これにより

$$A=-1, \quad B=\frac{3}{5}, \quad C=\frac{17}{5}$$

が得られたことから

$$\begin{aligned} F(s)&=\frac{3s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s-3)} \\ &=\frac{-1}{s-1}+\frac{\frac{3}{5}}{s+2}+\frac{\frac{17}{5}}{s-3} \\ &=-\frac{1}{s-1}+\frac{3}{5}\frac{1}{s+2}+\frac{17}{5}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

と部分分数分解されることがわかる．

したがって，逆ラプラス変換の線形性により

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s-1}+\frac{3}{5}\frac{1}{s+2}+\frac{17}{5}\frac{1}{s-3}\right]$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-2)}\right]+\frac{17}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$における，$a = 1, -2, 3$ の場合を利用する.

$$= -e^{t}+\frac{3}{5}e^{-2t}+\frac{17}{5}e^{3t} \quad \blacksquare$$

(Heaviside の展開定理を用いる方法)

『ポイント』　[1]における$a_1 = 1$，$a_2 = -2$，$a_3 = 3$ の場合で，$Q(s) = (s-1)(s+2)(s-3)$であり

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \frac{P(1)}{Q'(1)}e^{a_1 t}+\frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{a_2 t}+\frac{P(3)}{Q'(3)}e^{a_3 t}$$

となる場合である.

分子の$P(s) = 3s^2+2s+1$ について

$$P(1) = 6,\quad P(-2) = 9,\quad P(3) = 34$$

である．さらに，分母の$Q(s) = (s-1)(s+2)(s-3)$ について，積の微分公式

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f(x)'g(x)h(x)+f(x)g(x)'h(x)+f(x)g(x)h(x)'$$

を利用すると

$$Q'(s) = (s-1)'(s+2)(s-3)+(s-1)(s+2)'(s-3)+(s-1)(s+2)(s-3)'$$

$$= (s+2)(s-3)+(s-1)(s-3)+(s-1)(s+2)$$

となる.

（注）上式の分母は，敢えて展開して整理することをしない．次に$s = 1, -2,\ 3$ を代入するからである.

よって

$$Q'(1) = -6,\quad Q'(-2) = 15,\quad Q'(3) = 10$$

が求められる.

したがって

$$\frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{6}{-6} = -1,\quad \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},\quad \frac{P(3)}{Q'(3)} = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$$

であるから

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{a_1 t}+\frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{a_2 t}+\frac{P(3)}{Q'(3)}e^{a_3 t}$$
$$=-e^t+\frac{3}{5}e^{-2t}+\frac{17}{5}e^{3t} \quad ■$$

が得られる.

（留数定理（複素積分）を用いた方法）

まず

$$e^{st}F(s)=e^{st}\frac{3s^2+2S+1}{(s-1)(s+2)(s-3)}$$

の孤立特異点は，$s=1,-2,3$ であり，これらの 3 つの点はすべて1位の極である.

次に，これら3つの1位の極の留数を

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

を用いて求める.

$$\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,1\,]=\lim_{s\to 1}(s-1)e^{st}F(s)$$
$$=\lim_{s\to 1}(s-1)e^{st}\frac{3s^2+2S+1}{(s-1)(s+2)(s-3)}$$
$$=\lim_{s\to 1}e^{st}\frac{3s^2+2S+1}{(s+2)(s-3)}$$
$$=e^{1t}\frac{3+2+1}{3\times(-2)}$$
$$=e^t\frac{6}{-6}$$
$$=-e^t$$

であり，同様にして

$$\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,-2\,]=\frac{3}{5}e^{-2t},\quad \mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,3\,]=\frac{17}{5}e^{3t}$$

が得られる．したがって

$$L^{-1}[F(s)]=\mathrm{Res}[\,e^{st}\,F(s)\,,1\,]+\mathrm{Res}[\,e^{st}\,F(s)\,,-2\,]+\mathrm{Res}[\,e^{st}\,F(s)\,,3\,]$$
$$=-e^t+\frac{3}{5}e^{-2t}+\frac{17}{5}e^{3t} \quad ■$$

である.

(2)

（ラプラス変換の一意性に基づく方法）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at},\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at},\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^3}\right]=\frac{1}{2}t^2e^{at}$$

を利用するために，部分分数分解を行う．

$$\frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{(s-2)^3}$$

となるような定数A,B,C の値を求める．両辺に$(s-2)^3$ をかける．

$$2s^2+4s+1=A(s-2)^2+B(s-2)+C$$

これはs についての恒等式であり，両辺のs にどのような値を代入しても成り立つ．

両辺に$s=2$ を代入すると$8+8+1=C \Leftrightarrow C=17$ が得られる．よって

$$2s^2+4s+1=A(s-2)^2+B(s-2)+17.$$

両辺をs で微分すると

$$4s+4=2A(s-2)+B$$

である．両辺に$s=2$ を代入すると$8+4=B \Leftrightarrow B=12$ が得られる．よって

$$4s+4=2A(s-2)+12.$$

両辺をs で微分すると，$4=2A$ となり，$A=2$ が得られる．

よって，$A=2,\ B=12,\ C=17$ が求められたことから

$$F(s)=\frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3}$$

$$=\frac{2}{s-2}+\frac{12}{(s-2)^2}+\frac{17}{(s-2)^3}$$

$$=2\cdot\frac{1}{s-2}+12\cdot\frac{1}{(s-2)^2}+17\cdot\frac{1}{(s-2)^3}.$$

と部分分数分解されることがわかる．

したがって，逆ラプラス変換の線形性により

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[2\cdot\frac{1}{s-2}+12\cdot\frac{1}{(s-2)^2}+17\cdot\frac{1}{(s-2)^3}\right]$$

$$=2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+12\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]+17\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3}\right]$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$，$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at}$，$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^3}\right]=\frac{1}{2}t^2e^{at}$における，$a=2$の場合を利用する．

$$=2e^{2t}+12te^{2t}+17\cdot\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

$$=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+12t+2\right)\quad\blacksquare$$

(Heavisideの展開定理を用いる方法)

『ポイント』　[2]において$n=3$, $a=2$の場合で，$Q(s)=(s-2)^3$ であり

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}\left\{\frac{P(2)}{0!\cdot 2!}t^2+\frac{P'(2)}{1!\cdot 1!}t+\frac{P''(2)}{2!\cdot 0!}\right\}$$

となる場合である．

分子の$P(s)=2s^2+4s+1$ について

$$P'(s)=4s+4,\quad P''(s)=4$$

であるから

$$P(2)=17,\quad P'(2)=12,\quad P''(2)=4$$

が求められる．

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}\left\{\frac{P(2)}{0!\cdot 2!}t^2+\frac{P'(2)}{1!\cdot 1!}t+\frac{P''(2)}{2!\cdot 0!}\right\}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]&=e^{2t}\left\{\frac{P(2)}{0!\cdot 2!}t^2+\frac{P'(2)}{1!\cdot 1!}t+\frac{P''(2)}{2!\cdot 0!}\right\}\\&=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+\frac{12}{1}t+\frac{4}{2}\right)\\&=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+12t+2\right)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

が得られる．

（留数定理（複素積分）を用いた方法）

まず

$$e^{st}F(s)=e^{st}$$

の孤立特異点は，$s=2$ であり，これは3位の極である．　次に，3位の極の留数を

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,a\,]=\frac{1}{2\,!}\lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-a)^3f(z)\right\}$$

を使って求める．

$$(s-2)^3e^{st}F(s)=(s-2)^3e^{st}\frac{2s^2+4s+1}{(s-2)^3}=e^{st}(2s^2+4s+1)$$

であるから

$$\frac{d}{ds}\{(s-2)^3e^{st}F(s)\}=\{e^{st}(2s^2+4s+1)\}'$$

$$=te^{st}(2s^2+4s+1)+e^{st}(4s+4)\,,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\{(s-2)^3e^{st}F(s)\}=\{te^{st}(2s^2+4s+1)+e^{st}(4s+4)\}'$$

$$=e^{st}\{t^2(2s^2+4s+1)+2t(4s+4)+4\}$$

となっており

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,2\,]&=\frac{1}{2\,!}\lim_{s\to 2}\frac{d^2}{ds^2}\{(s-2)^3e^{st}F(s)\}\\&=\frac{1}{2\,!}\lim_{s\to 2}e^{st}\{t^2(2s^2+4s+1)+2t(4s+4)+4\}\\&=\frac{1}{2\,!}e^{2t}\{t^2(8+8+1)+2t(8+4)+4\}\\&=\frac{1}{2}e^{2t}\{17t^2+24t+4\}\\&=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+12t+2\right)\end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}L^{-1}[F(s)]&=\mathrm{Res}[\,e^{st}\,F(s)\,,2\,]\\&=e^{2t}\left(\frac{17}{2}t^2+12t+2\right)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

である．

(3)

（ラプラス変換の一意性に基づく方法）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\cos\omega t,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\sin\omega t\qquad (a\,,\omega\ \text{は定数})$$

を利用することを考える．

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{4s-5}{(s-3)^2+4}\\&=\frac{4(s-3)+7}{(s-3)^2+4}\\&=4\cdot\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\end{aligned}$$

と式変形ができる．したがって，逆ラプラス変換の線形性により

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[4\cdot\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\right]$$
$$= 4\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}\right]+\frac{7}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\right]$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\cos\omega t$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\sin\omega t$ における，$a=3\,,\omega=2$ の場合を利用する．

$$= 4e^{3t}\cos 2t+\frac{7}{2}e^{3t}\sin 2t$$
$$= \frac{8}{2}e^{3t}\cos 2t+\frac{7}{2}e^{3t}\sin 3t$$
$$= \frac{1}{2}e^{3t}(7\sin 2t+8\cos 2t) \quad ■$$

が得られる．

(Heaviside の展開定理を用いる方法)

まず，

$$F(s)=\frac{4s-5}{(s-3)^2-9+13}=\frac{4s-5}{(s-3)^2+4}=\frac{4s-5}{(s-3)^2+2^2}$$

と変形しておく．

[3]において $P(s)=4s-5,\ Q(s)=(s-3)^2+2^2$，すなわち$A=4,\ B=-5,\ a=3,\ b=2$ のときであり，さらに，$a+bi=3+2i$ であるから

$$P(a+bi)=A(a+bi)+B=4(3+2i)-5=7+8i$$

と計算されることから，$P(a+bi)$について，実部$A_1=7$，虚部$A_2=8$ の場合となっていることがわかる．

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{1}{b}e^{at}(A_1\sin bt+A_2\cos bt)$$

すなわち

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}e^{3t}(7\sin 2t+8\cos 2t) \quad ■$$

が得られる．

（留数定理（複素積分）を用いた方法）

まず，$s^2-6s+13=0$ を解けば$s=3\pm 2\,i$ である．

$$e^{st}F(s)=e^{st}\frac{2s+3}{s^2-6s+13}=e^{st}\frac{2s+3}{\{s-(3-2\,i)\}\{s-(3+2\,i)\}}$$

の孤立特異点は，$s=3-2\,i\,,3+2\,i$ の２点であり，どちらも１位の極である．

次に，これら２つの１位の極の留数を

$$\mathrm{Res}[\,f(z)\,,\alpha\,]=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

によって求める．

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,3-2\,i\,]&=\lim_{s\to 3-2\,i}\{s-(3-2\,i)\}e^{st}F(s)\\&=\lim_{s\to 3-2\,i}\{s-(3-2\,i)\}e^{st}\frac{4s-5}{\{s-(3-2\,i)\}\{s-(3+2\,i)\}}\\&=\lim_{s\to 3-2\,i}e^{st}\frac{4s-5}{s-(3+2\,i)}\\&=e^{(3-2\,i)t}\cdot\frac{4(3-2\,i)-5}{(3-2\,i)-(3+2\,i)}\\&=e^{3t-2t\,i}\cdot\frac{7-8\,i}{-4\,i}\\&=e^{3t-2t\,i}\cdot\frac{7-8\,i}{-4\,i}\cdot\frac{i}{i}\\&=e^{3t-2t\,i}\cdot\frac{8+7\,i}{4}\\&=e^{3t}\cdot e^{-2t\,i}\cdot\frac{8+7\,i}{4}\end{aligned}$$

であり，同様にして

$$\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,3+2\,i\,]=e^{3t}\cdot e^{2t\,i}\cdot\frac{8-7\,i}{4}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}L^{-1}[F(s)]&=\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,3-2\,i\,]+\mathrm{Res}[\,e^{st}F(s)\,,3+2\,i\,]\\&=e^{3t}\cdot e^{-2t\,i}\cdot\frac{8+7\,i}{4}+e^{3t}\cdot e^{2t\,i}\cdot\frac{8-7\,i}{4}\\&=\frac{1}{4}e^{3t}\left\{e^{-2t\,i}(8+7\,i)+e^{2t\,i}(8-7\,i)\right\}\end{aligned}$$

オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，　$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$　を利用する．

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{4}e^{3t}\{(8+7\,i)(\cos 2t-i\sin 2t)+(8-7\,i)(\cos 2t+i\sin 2t)\}\\&=\frac{1}{4}e^{3t}\{(-8\,i+7+8\,i+7)\sin 2t+(8+7\,i+8-7\,i)\cos 2t\}\\&=\frac{1}{4}e^{3t}(14\sin 2t+16\cos 2t)\\&=e^{3t}\left(\frac{14}{4}\sin 2t+\frac{16}{4}\cos 2t\right)\\&=e^{3t}\left(\frac{7}{2}\sin 2t+\frac{8}{2}\cos 2t\right)\\&=\frac{1}{2}e^{3t}(7\sin 2t+8\cos 2t)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

である．

（解答終）

参考文献

1）貴田研司，“大学初年次における数学教材の提案（その12）～留数定理を利用した逆ラプラス変換の計算～，”東海大学紀要情報通信学部，Vol.10,No.2,2017,pp33-40
2）福田安蔵，鈴木七緒，安岡善則，黒崎千代子 共編「詳解　応用解析演習」共立出版，1970
3）楠田信，平居孝之，福田亮治 著「使える数学フーリエ・ラプラス変換」共立出版，1997
4）大月卓郎，大芝猛，市川朗，竹内康博 共著「応用数学」学術図書，1987
5）樋口禎一，八高隆雄「フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本」牧野書店，2000
6）水本久夫「解析学の基礎」培風館，1989
7）田代嘉宏「ラプラス変換とフーリエ解析要論　第２版新装版」森北出版，2014
8）水本久夫「解析学の基礎」培風館，1989
9）田河生長，斎藤四郎，斎藤斉，高遠節夫 共著「応用数学」大日本図書，1995
10）上野健爾監修，高専の数学教材研究会「応用数学」森北出版，2013
11）上野健爾監修，工学系 数学教材研究会編「応用数学」森北出版，2015
12）矢野健太郎，石原繁 共著「解析学概論 新版」裳華房，1982
13）矢野健太郎，石原繁 共著「大学演習 解析学概論」裳華房，1967
14）矢野健太郎，石原繁 共著「基礎解析学コース 複素解析」裳華房，1995
15）矢野健太郎，石原繁 共著「基礎解析学コース 応用解析」裳華房，1996
16）C.R.ワイリー著，富久泰明訳「工業数学上・下」ブレイン図書出版，1973

付録

■ラプラス変換対応表■

・像関数の移動法則

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^2	$\frac{2\,!}{s^3}$	t^2e^{at}	$\frac{2\,!}{(s-a)^3}$
t^3	$\frac{3\,!}{s^4}$	t^3e^{at}	$\frac{n\,!}{(s-a)^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t^n	$\frac{n\,!}{s^{n+1}}$	t^ne^{at}	$\frac{n\,!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$

・像関数の微分公式（t 倍法則）

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	$tf(t)$	$-F'(s)=\mathcal{L}[tf(t)]$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\sinh\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
$\cosh\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$t\cosh\omega t$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$