東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.2,2021,pp.24-33

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 41）
～ 基本変形と基本行列 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.41
~ Elementary Operations and Elementary Matrices ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 26, 2021 & accepted on Jan. 11, 2022)

あらまし

本論文においては線形代数に関する話題として，基本行列を左から（または右から）かけることと，行（または列）基本変形の関係について述べる．

Abstract

In this paper, we give explanation of items for linear algebra. We present specially relation between elementary matrices and elementary operations.

キーワード：基本行列，行基本変形，列基本変形，標準形，行列の分解

Keywords: *Elementary Matrix Elementary Row Operation, Elementary Column Operation, Canonical Form, Matrix Decomposition*

1. はじめに

大学初年次に学ぶ線形代数において，行列と行列式についての計算に習熟することは学習の第一段階である．単位行列に行（または列）基本変形を施したものを基本行列というが，行列に基本変形を施して得られる行列と基本行列の関係について次のことが知られている．

定理（基本変形と基本行列）

(m,n) 型行列 A に対して，次のことが成り立つ．

(1) A に行基本変形を施すことは，同一の行基本変形を m 次単位行列 E_m に施して得られる基本行列を左からかけることと同じである．

(2) A に列基本変形を施すことは，同一の列基本変形を n 次単位行列 E_n に施して得られる基本行列を右からかけることと同じである．□

この定理について，いくつかの例をあげることにより行列に基本変形を施すことと行列に基本行列をかけることの関係をみた後に証明を詳しく述べる．そして，階数標準形に因んだ計算例を紹介することにする．

本論文の執筆にあたって，横山雄一「線形代数」[1)]が大いに役に立った．その他にも多くの好著を参考にさせていただいた[2)3)4)5)6)7)8)9)]．

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus), Professor

2. 基本変形と基本行列

基本変形（行基本変形と列基本変形の総称）

① 行基本変形

（I）第 i 行を $\alpha(\neq 0)$ 倍する．

（II）第 i 行に第 j 行の α 倍を加える．$(i \neq j)$

（III）第 i 行と第 j 行を入れかえる．$(i \neq j)$

② 列基本変形

（I）’ 第 i 列を $\alpha(\neq 0)$ 倍する．

（II）’ 第 i 列に第 j 列の α 倍を加える．$(i \neq j)$

（III）’ 第 i 列と第 j を入れかえる．$(i \neq j)$

基本行列

単位行列 E に基本変形(I), (II), (III), (I)’, (II)’, (III)’をそれぞれ行って得られる行列を基本行列という．

(I)

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(II)

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (i < j)$$

または

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & \alpha & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (j) \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (i > j)$$

(III), (III)’

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad (i \neq j)$$

（I）'

$$D_i'(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \alpha &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & (i) & & & \end{array} \end{array}$$

（II）'

$$E_{ij}'(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ && \vdots & \ddots &&& \\ && \alpha & \cdots & 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \end{array} \qquad (i < j)$$

または

$$E_{ij}'(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & \alpha && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & (j) & & (i) & & \end{array} \end{array} \qquad (i > j)$$

（III）'

$$C_{ij}' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & (i) & & (j) & & & \end{array} \end{array} \qquad (i \neq j)$$

定理（基本行列の逆行列）

（1）$$D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \frac{1}{\alpha} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad (\alpha \neq 0)$$

(2)　$E_{ij}(\alpha)^{-1}=E_{ij}(-\alpha)$であり

$$E_{ij}(-\alpha)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&-\alpha&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\ \\(i)\\ \\(j)\\ \\ \\ \end{array}\end{array}\qquad(i<j)$$

または

$$E_{ij}(-\alpha)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&-\alpha&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\ \\(j)\\ \\(i)\\ \\ \\ \end{array}\end{array}\qquad(i>j)$$

(3)

$$C_{ij}{}^{-1}=C_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\ \\ \\(i)\\ \\(j)\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}\qquad(i\neq j)$$

(1)'　$$D_i'(\alpha)^{-1}=D_i'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\frac{1}{\alpha}&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \qquad\quad(i)\qquad\quad\end{array}\qquad(\alpha\neq 0)$$

(2)'　$E_{ij}'(\alpha)^{-1}=E_{ij}'(-\alpha)$であり

$$E_{ij}'(-\alpha)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&-\alpha&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \qquad(i)\qquad(j)\qquad\end{array}\qquad(i<j)$$

または

$$E_{ij}'(-\alpha)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&-\alpha&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \qquad(j)\qquad(i)\qquad\end{array}\qquad(i>j)$$

(3)’

$$
{C'_{ij}}^{-1} = C'_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
& & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
& & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\quad (i \neq j)
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & (i) & & (j) & & &
\end{array}
$$

となる．□

次は，行列に基本変形を施して得られる行列と基本行列の関係がどのようになっているかを，例 1 と例 2 で見ることにする．

例 1（行基本変形）

(I)

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \text{第 3 行を 5 倍する} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 5s_3 & 5t_3 & 5u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 3 行を 5 倍する} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 5s_3 & 5t_3 & 5u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}
$$

(II)

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \text{第 4 行に第 1 行の 3 倍を加える} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 + 3a_1 & y_4 + 3b_1 & z_4 + 3c_1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 4 行に第 1 行の 3 倍を加える} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 + 3a_1 & y_4 + 3b_1 & z_4 + 3c_1 \end{pmatrix}
$$

(III)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \text{第 2 行と第 4 行を入れかえる} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 2 行と第 4 行を入れかえる} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ s_3 & t_3 & u_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

例 2（列基本変形）

(I)

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{第 3 列を 4 倍する} \begin{pmatrix} a_1 & s_2 & 4x_3 \\ b_1 & t_2 & 4y_3 \\ c_1 & u_2 & 4z_3 \\ d_1 & v_2 & 4w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 3 列を 4 倍する} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & s_2 & 4x_3 \\ b_1 & t_2 & 4y_3 \\ c_1 & u_2 & 4z_3 \\ d_1 & v_2 & 4w_3 \end{pmatrix}$$

(II)

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{第 2 列に第 3 列の 7 倍を加える} \begin{pmatrix} a_1 & s_2 + 7x_3 & x_3 \\ b_1 & t_2 + 7y_3 & y_3 \\ c_1 & u_2 + 7z_3 & z_3 \\ d_1 & v_2 + 7w_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 2 列に第 3 列の 7 倍を加える} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & s_2 + 7x_3 & x_3 \\ b_1 & t_2 + 7y_3 & y_3 \\ c_1 & u_2 + 7z_3 & z_3 \\ d_1 & v_2 + 7w_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

（III）

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{第 1 列と第 2 列を入れかえる} \begin{pmatrix} s_2 & a_1 & x_3 \\ t_2 & b_1 & y_3 \\ u_2 & c_1 & z_3 \\ v_2 & d_1 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{第 1 列と第 2 列を入れかえる} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & s_2 & x_3 \\ b_1 & t_2 & y_3 \\ c_1 & u_2 & z_3 \\ d_1 & v_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 & a_1 & x_3 \\ t_2 & b_1 & y_3 \\ u_2 & c_1 & z_3 \\ v_2 & d_1 & w_3 \end{pmatrix}$$

例 1, 例 2 を一般化したものが，次の定理である.

定理（基本変形と基本行列）

(m,n) 型行列 A に対して，次のことが成り立つ.

(1) A に行基本変形を施すことは，同一の行基本変形を m 次単位行列 E_m に施して得られる基本行列を左からかけることと同じである.

(2) A に列基本変形を施すことは，同一の列基本変形を n 次単位行列 E_n に施して得られる基本行列を右からかけることと同じである. □

（証明）

(1)

(m,n) 型行列 A の行ベクトルを $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(m)}$ とおき， m 次単位行列 E_m の行ベクトルを $e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots, e^{(m)}$ とおくことにする.

$A = E_m A$ であるから

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(s)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \text{および} E_m A = \begin{pmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(s)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e^{(1)} A \\ \vdots \\ e^{(s)} A \\ \vdots \\ e^{(m)} A \end{pmatrix}$$

により

$$a^{(s)} = e^{(s)} A \quad (s = 1, 2, \cdots, m)$$

が得られる.

（I）

$$D_k(\alpha) A = \begin{pmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha\, e^{(k)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e^{(1)} A \\ \vdots \\ \alpha\, e^{(k)} A \\ \vdots \\ e^{(m)} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha\, a^{(k)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$$

(II)

$$E_{ij}(\alpha)A=\begin{pmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(i)}+\alpha e^{(j)} \\ \vdots \\ e^{(j)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \end{pmatrix}A$$

$$=\begin{pmatrix} e^{(1)}A \\ \vdots \\ \left(e^{(i)}+\alpha e^{(j)}\right)A \\ \vdots \\ e^{(j)}A \\ \vdots \\ e^{(m)}A \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{(1)}A \\ \vdots \\ e^{(i)}A+\alpha e^{(j)}A \\ \vdots \\ e^{(j)}A \\ \vdots \\ e^{(m)}A \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(i)}+\alpha a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$$

(III)

$$C_{ij}A=\begin{pmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(j)} \\ \vdots \\ e^{(i)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{(1)}A \\ \vdots \\ e^{(j)}A \\ \vdots \\ e^{(i)}A \\ \vdots \\ e^{(m)}A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$$

(2)

(m,n) 型行列A の列ベクトルを$a_{(1)},a_{(2)},\cdots,a_{(n)}$ とおき，n 次単位行列E_n列ベクトルを$e_{(1)},e_{(2)},\cdots,e_{(n)}$ おくことにする．

$A=AE_n$ であるから

$$A=\begin{pmatrix} a_{(1)} & \cdots & a_{(t)} & \cdots & a_{(n)} \end{pmatrix}$$

および

$$AE_n=A\begin{pmatrix} e_{(1)} & \cdots & e_{(t)} & \cdots & e_{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ae_{(1)} & \cdots & Ae_{(t)} & \cdots & Ae_{(n)} \end{pmatrix}$$

により

$$a_{(t)} = Ae_{(t)} \quad (t = 1, 2, \cdots, n)$$

が得られる．

（I）’

$$\begin{aligned} AD_k(\alpha) &= A(e_{(1)} \quad \cdots \quad \alpha e_{(k)} \quad \cdots \quad e_{(n)}) \\ &= (Ae_{(1)} \quad \cdots \quad A\alpha e_{(k)} \quad \cdots \quad Ae_{(n)}) \\ &= (a_{(1)} \quad \cdots \quad \alpha a_{(k)} \quad \cdots \quad a_{(n)}) \end{aligned}$$

（II）’

$$\begin{aligned} AE_{ij}(\alpha) &= A\big(e_{(1)} \quad \cdots \quad e_{(i)} \quad \cdots \quad e_{(j)} + \alpha e_{(i)} \quad \cdots \quad e_{(n)}\big) \\ &= \big(Ae_{(1)} \quad \cdots \quad Ae_{(i)} \quad \cdots \quad A\big(e_{(j)} + \alpha e_{(i)}\big) \quad \cdots \quad Ae_{(n)}\big) \\ &= \big(Ae_{(1)} \quad \cdots \quad Ae_{(i)} \quad \cdots \quad Ae_{(j)} + A\alpha e_{(i)} \quad \cdots \quad Ae_{(n)}\big) \\ &= \big(a_{(1)} \quad \cdots \quad a_{(i)} \quad \cdots \quad a_{(j)} + \alpha a_{(i)} \quad \cdots \quad a_{(n)}\big) \end{aligned}$$

（III）’

$$\begin{aligned} AC_{ij} &= A(e_{(1)} \quad \cdots \quad e_{(j)} \quad \cdots \quad e_{(i)} \quad \cdots \quad e_{(n)}) \\ &= \big(Ae_{(1)} \quad \cdots \quad Ae_{(j)} \quad \cdots \quad Ae_{(i)} \quad \cdots \quad Ae_{(n)}\big) \\ &= (a_{(1)} \quad \cdots \quad a_{(j)} \quad \cdots \quad a_{(i)} \quad \cdots \quad a_{(n)}) \end{aligned}$$

（証明終）

3. 階数標準形

定理（階数標準形）

(m, n) 型行列A に対して，m 次正則行列P とn 次正則行列Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし，r はA の階数であり，$r = \min(m, n)$を満たす．□

例題

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$を階数標準形に直せ．

（解答）

A に行基本変形および列基本変形を施すことにより，階数標準形に直す．

基本変形	$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&3&3&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$		基本変形を，A と基本行列の積で表す.
$R_1\times(-2)+R_2\to R_2$	$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&3&3&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$
$R_2\times(-1)\to R_2$	$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$
$R_2\times(-2)\to R_1$	$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$
$R_2\times(-1)+R_3\to R_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
$C_1\times(-1)+C_4\to C_4$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
$C_2\times(-1)+C_3\to C_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

以上より

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

とおけば，基本行列の積であるP,Q は正則行列であり

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

が成り立つ.

（解答終）

参考文献

1）横山雄一「線形代数学」昭晃堂，1975
2）石田信「線形代数入門」共立全書，1974
2）川久保勝夫「線形代数学」日本評論社，1999
5）硲野俊博，加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書，1994
6）硲野俊博，山田浩，山辺元雄 共著「理工系の演習線形代数学」学術図書，2001
7）服部昭「線型代数学」朝倉書店，1982
8）小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
9）富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975