東海大学紀要情報通信学部
Vol.16,2023,pp.26-29

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 45）
～ 良性の行列と悪性の行列 ～

貴田 研司*1

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.45
~ Well-Conditioned Matrix and Ill-Conditioned Matrix ~

by

Kenshi KIDA*1

(received on Nov.24,2023 & accepted on Jan.26,2024)

あらまし
本論文においては，連立一次方程式の解の感度について，具体的な例を挙げながら考察して行くことにするが，測定する量の一つである条件数について言及する．

Abstract
In this paper, we give explanation of sensivity for solutions of system of equations.We refer to example of calculations. Furthermore, we mention the concept of condition numbers.

キーワード：良性の行列，悪性の行列，条件数
Keywords: *Well-Conditioned Matrix, Ill-Conditioned Matrix, Condition Number*

1. はじめに

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，ただし

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

の解$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ の感度（解のもろさ）すなわち，$\boldsymbol{b}$ が少し変化したときの解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ に対する影響の大きさを計ることを考える．影響が僅かであるときに係数行列 A は，**良性の行列（良条件）**と呼ばれ，影響が大きいときに**悪性の行列（悪条件）**と呼ばれる．

条件数とは，データの変化量に対する解の変化量の比を与える指標であり，この場合は $\boldsymbol{b}$ がデータであり，$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ が解である．係数行列 A が良性の行列（良条件）であるか悪性の行列（悪条件）を判定する指標となっている．正定値対称行列A に対して，固有値を

$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ とおけば，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ および誤差$\delta x=A^{-1}\delta b$は

$$\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\lambda_n} \text{ および } \|\delta x\| \le \frac{\|\delta b\|}{\lambda_1}$$

を常に満たす．

*1 理系教育センター　教授

したがって，相対誤差は

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\ x\ \|} \le \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

でおさえられる．量

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{\min}}$$

は A の**条件数**と呼ばれ，正定値対称行列の仮定を外すと，条件数は

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$$

となる [1)2)]．条件数が大きいときは悪性の行列（悪条件）であり，小さいときは良性の行列（良条件）となっている．

本論文では，例題 1（悪性の行列（ill-conditioned)），例題 2（良性の行列（well-conditioned)）の 2 つの例題によって，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解くときの解の $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ 不確かさについて理解し，そしてコンピュータでの数値解析を行なう際のその不確かさ（感度，解のもろさ）（数値解析に適している度合い）を測る尺度として，条件数を挙げる．条件数が小さい場合（例題 2）は良条件 (well-conditioned)」であり、条件数が大きい場合（例題 1）は「悪条件 (ill-conditioned)」である．

2. 良性の行列と悪性の行列

【参考】定理（クラーメルの公式）

n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む n 個の方程式からなる連立一次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \cdots\cdots (**)$ と表される．また，n 次行列 A の第 k 列のみを b に置き換えてできる n 次行列を

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

とおく．

$|A| \neq 0$ ならば$(*)$はただ一つの解

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

をもつ．

例題 1 （悪性の行列（ill-conditioned））

次の連立一次方程式を，クラーメルの公式を用いて解け．

(1) $\begin{cases} u + v = 2 \\ u + 1.0001v = 2.0001 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} u + v = 2 \\ u + 1.0001v = 2.0002 \end{cases}$

（解答）

加減法，代入法ではなく，敢えてクラーメルの公式を用いて解く．

まず

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{vmatrix} = 0.0001$$

とおくことにする．

(1) $u = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2.0001 & 1.0001 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{0.0001} \times 0.0001 = 1$，$v = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.0001 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{0.0001} \times 0.0001$

$= 1.$

＜答＞　$u = 1$，$v = 1$

(2) $u = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2.0002 & 1.0001 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{0.0001} \times 0 = 0$，$v = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.0002 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{0.0001} \times 0.0002 = 2.$

＜答＞　$u = 0$，$v = 2$

例題 2（良性の行列（well-conditioned））

次の連立一次方程式を，クラーメルの公式を用いて解け．

(1) $\begin{cases} 0.0001u + v = 1.0001 \\ u + v = 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.0001u + v = 1.0002 \\ u + v = 1 \end{cases}$

（解答）

例題 1 と同様に，加減法，代入法ではなく，敢えてクラーメルの公式を用いて解く．

まず

$$|A| = \begin{vmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -0.9999$$

とおくことにする．

(1) $u = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{-0.9999} \times 0.0001 = -0.00010001$,

$v = \dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0.0001 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{-0.9999} \times (-1) = 1.0001.0001.$

＜答＞　$u = -0.00010001$，$v = 1.0001.0001$

$$(2)\ u=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}1.0002 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{-0.9999}\times 0.0002=-0.00020002\,,$$

$$v=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}0.0001 & 1.0002\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{-0.9999}\times(-1.0001)=1.0002.0002.$$

＜答＞ $u=-0.00020002$，$v=1.0002.0002$

例題 1 では，2 本目の方程式の定数項が2.0001から2.0002 に変わっただけで，解は$u=1$，$v=1$ から $u=0$，$v=2$ に大きく変わった．一方の例題 2 において 1 本目の方程式の定数項が1.0001から1.0002に変わったものの解は$u=-0.00010001$，$v=1.0001.0001$から$u=-0.00020002$，$v=1.0002.0002$へと僅かに変化しただけである．それぞれの条件数を比較すると，例題 1（悪性の行列）では，40002 であり，例題 2（良性の行列）では-2.61839となっている．

また，敢えてクラーメルの公式で連立一次方程式を解いた行列式も解の感度を計るものになりそうであることを示すために，敢えてクラーメルの公式で連立一次方程式を解いたのであるが，実際には次数の影響を大きく受けることからもあまりよい尺度とは言えないことを付け加えておく．

参考文献

1）ギルバート・ストラング著，山口昌也哉監訳，井上昭訳「線形代数とその応用」産業図書，1978
2）ギルバート・ストラング著，松崎公紀・平鍋健児訳「教養の線形代数」近代科学社，2023